Квадратные уравнения

Оглавление

4. Решение и исследование квадратных уравнений

4.1. Квадратное уравнение с числовыми коэффициентами

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c - действительные числа, причем $a \neq 0$, x - переменная, называется квадратным.

Дискриминантом квадратного уравнения называется число, составленное из коэффициентов уравнения: $D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$.

По значению дискриминанта можно установить число решений уравнения или узнать, имеет ли оно решение вообще, т. е. ***исследовать*** уравнение.

1-й случай. D > 0. Уравнение имеет два различных действительных корня (действительных, т. е. принадлежащих множеству действительных чисел):

$$x_{1,\ 2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2 \cdot a}.$$

Если построить график квадратной функции $y = ax^2 + bx + c$, то окажется, что он в двух точках пересекает ось OX, которые и являются корнями уравнения. Причем, если a > 0, то ветви графика (параболы) будут направлены вверх, при $a < 0$ - ветви направлены вниз. Это показано на рис. 24 и рис. 25.

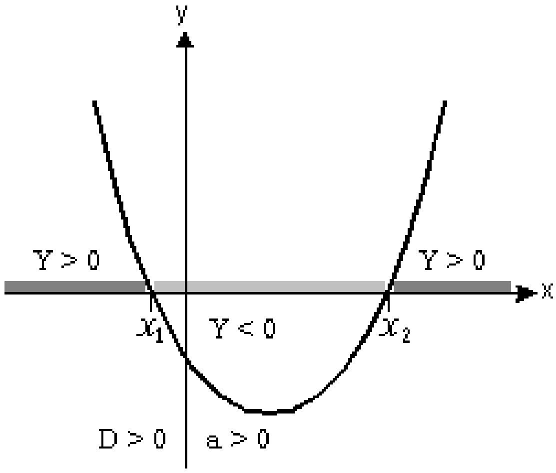


Рис. 24

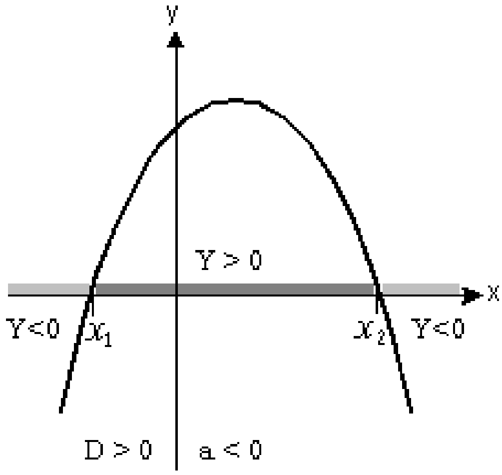


Рис. 25

Попутно следует заметить, что если a > 0, то трехчлен (у) принимает положительные значения (у > 0) при $x \in (-\infty,\ \ x_1) \bigcup (x_2,\ \ \infty)$, а отрицательные значения (у < 0) при $x \in (x_1,\ \ x_2)$. Мы заведомо считаем что $x_1 < x_2$.

Если a < 0, то у > 0 при $x \in (x_1,\ \ x_2)$, у < 0 при $x \in (-\infty,\ \ x_1) \bigcup (x_2,\ \ \infty)$.

2-й случай. Если D = 0, тогда уравнение имеет единственное решение или два равных корня: $x = -\dfrac{b}{2 \cdot a}$.

График квадратной функции, в этом случае, имеет только одну точку пересечения с осью OX (см. рис. 26).

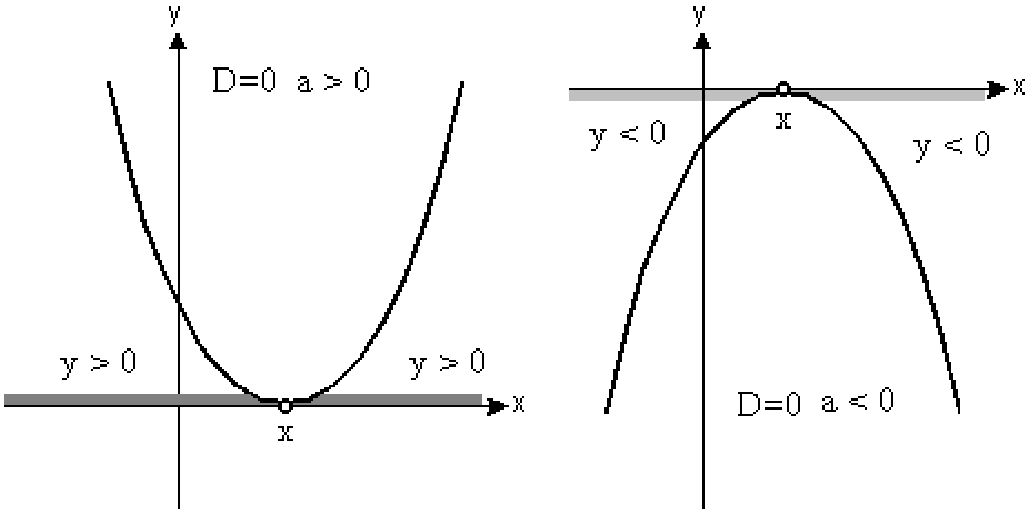


Рис. 26

Замечаем, что если a > 0, тогда трехчлен (y) принимает положительные значения при всех значениях x, кроме $x=-\dfrac{b}{2a}$, $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a},\ \infty\right)$ и не принимает отрицательных значений;

если a < 0, тогда трехчлен (y) принимает отрицательные (y < 0) значения при всех значениях x, кроме $x=-\dfrac{b}{2a}$, $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{b}{2a}\right)\cup\left(-\dfrac{b}{2a},\ \infty\right)$ и не принимает положительных значений.

3-й случай. Если D < 0, тогда уравнение не имеет действительных корней.

График функции $y=ax^2+bx+c$ не будет пересекать ось OX и при a > 0 функция принимает при всех x только положительные значения (y > 0), а при a < 0 только отрицательные значения (y < 0) (см. рис. 27).

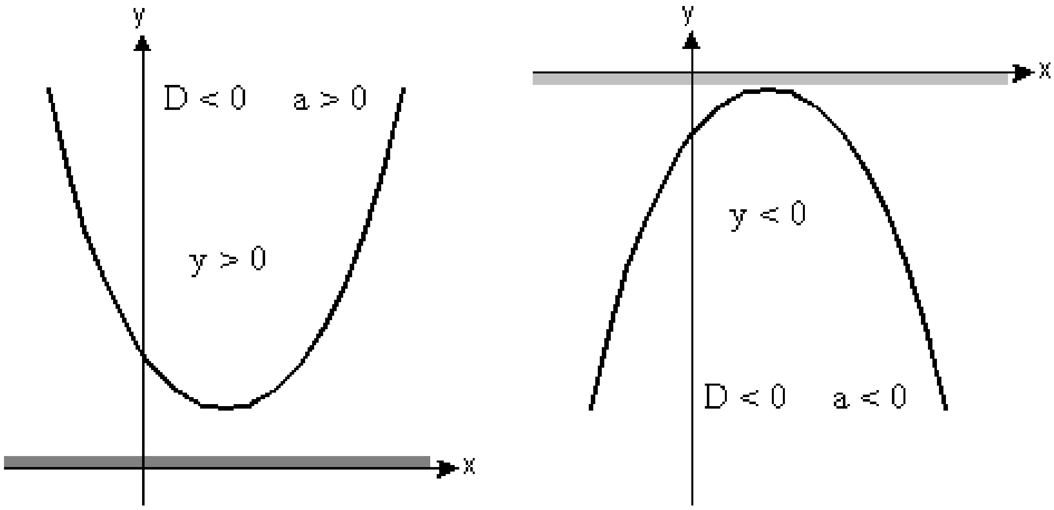


Рис. 27

Определение. Квадратное уравнение называется приведенным, если коэффициент при x^2 равен 1, т. е. a = 1.

В этом случае, уравнение можно записать в виде: $x^2+px+q=0$.

Теорема Виета

Теорема 1. Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ **имеет корни** $(D \geq 0)$**, то сумма их равна второму коэффициенту, взятому с противоположным знаком:** $x_1 + x_2 = -p,$ **а произведение корней, равно свободному члену:** $x_1 \cdot x_2 = q.$

Теорема 2 (обратная). **Если сумма двух действительных чисел (обозначим их** x_1 **и** x_2**, впрочем, можно и другими буквами) равна -p, а их произведение равно q, то эти числа являются корнями квадратного уравнения** $x^2 + px + q = 0$**.**

Вот эта теорема (обратная), дает возможность, не решая квадратное уравнение находить его корни.

Например, для уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$, легко усмотреть, что два числа, а именно, 2 и 3, в сумме дают 5 - второй коэффициент с противоположным знаком, а их произведение равно 6, значит, они являются корнями данного квадратного уравнения: $x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$ Во многих случаях это облегчает решение квадратных уравнений.

Знаки корней приведенного квадратного уравнения

Если свободный член q приведенного квадратного уравнения больше нуля, q>0, то оба корня имеют одинаковые знаки, либо оба положительны, либо оба отрицательны.

В самом деле, если $x_1 > 0$ и $x_2 > 0$, тогда $x_1 \cdot x_2 > 0,$ но $x_1 \cdot x_2 = q,$ значит $q > 0;$ если $x_1 < 0$ и $x_2 < 0,$ тогда снова $x_1 \cdot x_2 > 0,$ а значит, и в этом случае $q > 0.$ Нетрудно доказать и обратное утверждение.

Если к тому же, второй коэффициент имеет отрицательный знак (р < 0), то оба корня положительны, в противном случае, (при р > 0) оба корня отрицательны.

Если свободный член приведенного квадратного уравнения - отрицателен (q<0), тогда корни имеют разные знаки, что нетрудно доказать, подобно предыдущему.

Но здесь любопытно другое! Можно установить, который из корней имеет отрицательный знак, а какой - положительный.

Для этого достаточно обратиться к знаку второго коэффициента р. Если его знак отрицательный, значит больший по модулю корень, будет положительным, а меньший по модулю корень - отрицательный знак. Если знак второго коэффициента положительный, тогда больший по модулю корень будет отрицательным, а меньший положительным.

Доказательство этого факта предоставим читателю.

Примеры: а) $x^2 - 7x + 12 = 0,$ б) $x^2 + 14x + 48 = 0,$
в) $x^2 - x - 12 = 0,$ г) $x^2 + 3x - 40 = 0.$

В уравнении а) свободный член (12) положителен, значит, оба корня имеют одинаковые знаки. Второй коэффициент (-7) отрицателен, значит, оба корня положительны.

В самом деле, $x_1 = 3$ и $x_2 = 4.$

В уравнении б) свободный член положителен и второй коэффициент положителен, значит оба корня отрицательны.

Нетрудно проверить, что $x_1 = -6$ и $x_2 = -8.$

В уравнении в) свободный член отрицателен (-12), значит, корни имеют разные знаки, а поскольку второй коэффициент также отрицателен (-1), тогда больший по модулю корень будет положительным, а меньший по модулю - отрицателен.

Найдем корни и убедимся в этом: $x_1 = 4, \quad x_2 = -3.$

Разложение квадратного трехчлена на линейные множители

Пусть квадратный трехчлен $x^2 + px + q$ имеет корни x_1 и x_2. Тогда, по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p$ или $p = -(x_1 + x_2)$, а $x_1 \cdot x_2 = q$ или $q = x_1 \cdot x_2$.

Подставим в квадратный трехчлен вместо p и q их значения, получим:

$$x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 = x^2 - x_1 \cdot x - x_2 x + x_1 \cdot x_2 = x(x - x_1) - x_2(x - x_1) =$$
$$= (x - x_1)(x - x_2).$$

Справедливо и обратное. Таким образом: $x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2)$.

Можно показать, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

4.2. Решить и исследовать квадратные уравнения относительно параметров

Пример 1. При каком значении k корни уравнения будут равны между собой:

$$(k - 1)x^2 - 2(k + 1)x + k + 4 = 0.$$

Решение

Известно, что квадратное уравнение имеет равные корни, если его дискриминант равен нулю, а первый коэффициент отличен от нуля: $a \neq 0$, D = 0.

Найдем дискриминант:

$$D = 4(k + 1)^2 - 4(k - 1)(k + 4) = 4k^2 + 8k + 4 - 4k^2 - 16k + 4k + 16 = -4k + 20.$$

Он должен равняться нулю: $-4k + 20 = 0, \quad k = 5.$

При этом значении k первый коэффициент k - 1 будет равен 4, т. е. отличен от нуля.

И все-таки, есть смысл рассмотреть случай, когда первый коэффициент равен нулю: k - 1 = 0, k = 1. При этом значении k уравнение примет вид:

$$-4x + 5 = 0, \quad x = \frac{5}{4}, \quad x = 1{,}25.$$

В этом случае уравнение также имеет один корень, но мы не можем принять это значение k, поскольку в условии требуется выяснить, когда уравнение имеет два равных корня, а при k = 1 уравнение "вырождается" в линейное и мы имеем один корень.

Ответ: при k = 5.

Пример 2. При каком значении a уравнение имеет действительные корни:

$$(a + 3)x^2 + (2a + 3)x + a + 5 = 0\,?$$

Решение

1. Сразу рассмотрим случай, когда первый коэффициент равен нулю:

$$a + 3 = 0, \quad a = -3.$$

При этом значении а уравнение станет линейным $-3x+2=0$ и будет иметь один корень $x=\frac{2}{3}$, значит, значение $a=-3$ удовлетворяет условию задачи.

2. Известно, что квадратное уравнение будет иметь корни, если его дискриминант неотрицателен. Найдем дискриминант:

$$D=(2a+3)^2-4(a+3)(a+5)=-20a-51, \quad -20a-51\geq 0, \quad a\leq -\frac{51}{20}.$$

Значение $a=-3$ из первого случая, входит в полученный промежуток.

Ответ: $a\in\left(-\infty; \quad -\frac{51}{20}\right]$.

Пример 3. При каком значении а уравнение имеет действительные корни одного знака: $(a+5)x^2+(2a-3)x+a-10=0$?

Решение

1. В этой задаче надо потребовать, чтобы первый коэффициент не был равен нулю, иначе уравнение станет линейным и вести разговор о "знаках корней" во множественном числе становится бессмысленным, ибо линейное уравнение, может иметь либо один корень, либо бесконечное множество, или вовсе не имеет корней.

Кроме того, чтобы выяснить вопрос о знаках корней, нам необходимо преобразовать уравнение к приведенному, а значит делить все его коэффициенты на первый коэффициент, что было бы сделать невозможным, будь он равен нулю.

Итак, $a+5\neq 0, \quad a\neq -5.$

2. Чтобы уравнение имело корни, его дискриминант должен быть неотрицательным:

$$D=(2a-3)^2-4(a+5)(a-10)=4a^2-12a+9-4a^2+40a-20a+200=8a+209,$$
$$8a+209\geq 0.$$

3. Преобразуем уравнение к приведенному, получим:

$$x^2+\frac{2a-3}{a+5}x+\frac{a-10}{a+5}=0.$$

Чтобы уравнение имело корни одного знака, его свободный член должен быть положительным: $\frac{a-10}{a+5}>0.$

В результате получим систему, состоящую из трех неравенств:

$$\begin{cases} a\neq 5, \\ 8a+209\geq 0, \\ \frac{a-10}{a+5}>0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 5, \\ a\geq -\frac{209}{8}, \\ \frac{a-10}{a+5}>0. \end{cases}$$

Изображаем решения первых двух неравенств на числовых осях, а третье неравенство решим методом промежутков (рис. 28):

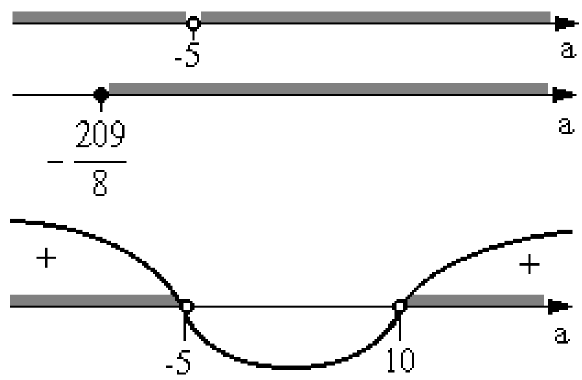


Рис. 28

Ответ: $a \in \left[-\frac{209}{8},\ -5\right) \cup (10,\ \infty)$.

Пример 4. Дано уравнение: $9x^2 - (2-a)x - (6+a) = 0$. Определить, при каком значении a:

1) уравнение имеет равные корни;
2) уравнение имеет корни, равные по модулю и противоположные по знаку.

Решение

Первый коэффициент этого уравнения отличен от нуля $(9 \neq 0)$.

1) Квадратное уравнение имеет равные корни, если его дискриминант равен нулю: $D = (2-a)^2 + 4 \cdot 9 \cdot (6+a) = 4 - 4a + a^2 + 216 + 36a = a^2 + 32a + 220$,

$a^2 + 32a + 220 = 0, \quad a_1 = -22, \quad a_2 = -10.$

Ответ: при $a_1 = -22$ *и* $a_2 = -10$.

2) ***Во-первых***, уравнение должно иметь различные корни, а значит $D > 0$.

Получим неравенство: $D = a^2 + 32a + 220 = (a+22)(a+10) > 0$.

Во-вторых, чтобы корни были равны по модулю, но противоположны по знаку (их сумма, в этом случае, равна нулю, а произведение отрицательно), второй коэффициент приведенного квадратного уравнения должен быть равен нулю, а свободный член отрицательным.

$x^2 - \frac{2-a}{9}x - \frac{6+a}{9} = 0$, отсюда находим, что

$$\frac{2-a}{9} = 0, \quad 2 - a = 0 \text{ и } -\frac{6+a}{9} < 0, \quad 6 - a > 0.$$

Получим смешанную систему (её решение см. по рис. 29):

$$\begin{cases} (a+22)(a+1) > 0, \\ 2 - a = 0, \\ 6 + a > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+22)(a+1) > 0, \\ a = 2, \\ a > -6. \end{cases}$$

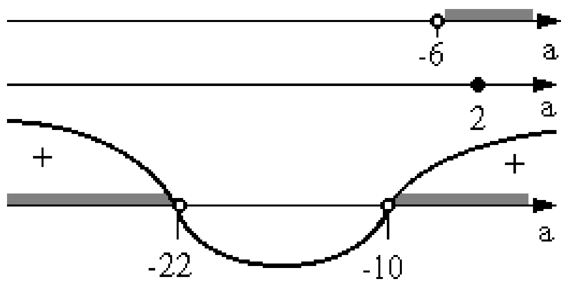


Рис. 29

Общим решением является только одно значение а, а = 2.

Ответ: при а = 2.

Пример 5. При каких значениях k уравнение имеет хотя бы один положительный корень: $x^2 + 2(k-1)x + k + 5 = 0$?

Решение

Идея решения состоит в следующем: определяем множество значений k, при которых уравнение вообще ***имеет*** решения, обозначим это множество - А; затем находим множество значений k, при которых уравнение имеет ***отрицательные*** корни, обозначим это множество - В; тогда, если из множества А вычесть множество В, тогда получим множество значений k, при которых уравнение имеет хотя бы один положительный корень, обозначим это множество значений X, X = A - B.

1. Находим, при каких значениях k уравнение имеет корни. Если дискриминант неотрицателен:

$$D = 4(k-1)^2 - 4(k+5) = 4k^2 - 8k + 4 - 4k - 20 = 4k^2 - 12k - 16,$$

$$4k^2 - 12k - 16 \ge 0, \quad k^2 - 3k - 4 \ge 0, \quad (k+1)(k-4) \ge 0.$$

Решим это неравенство методом промежутков (см. рис. 30):

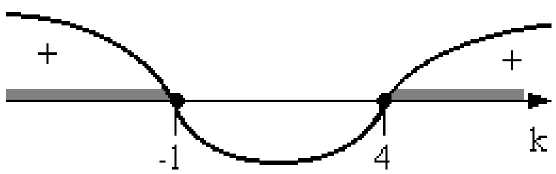


Рис. 30

Получаем объединение множеств: $A = \{k | k \in (-\infty; \ -1] \cup [4; \ \infty)\}$.

При этих значениях k корни могут быть оба положительными, разных знаков и оба отрицательными.

2. Найдем значения k, при которых оба корня отрицательны. По теореме Виета имеем систему неравенств: $x_1 + x_2 = -2(k-1) < 0$ и $x_1 \cdot x_2 = k + 5 > 0$.

$$\begin{cases} -2(k-1) < 0, \\ k + 5 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k > 1, \\ k > -5, \end{cases} \Leftrightarrow k > 1, \ B = \{k | k \in (1; \ \infty)\}.$$

3. Найдем разность множеств А - В. Это легко сделать графически.

Для этого на двух числовых осях изобразим множество А и множество В, а на третьей числовой оси разность этих множеств (см. рис. 31).

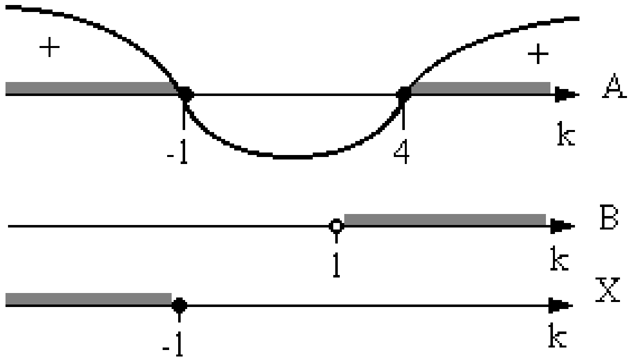


Рис. 31

Отсюда находим, $X = \{k | k \in (-\infty; \ -1]\}$.

Ответ: при $k \in (-\infty; \ -1]$.

Пример 6. Найти значения p, при которых уравнение не имеет корней:

$$5(10-p)x - 10\sqrt{x} + 6 - p = 0.$$

Решение

В первую очередь, выясним, будет ли иметь решение уравнение, когда его первый коэффициент равен нулю: $5(10-p)=0, \ 10-p=0, \ p=10.$ Уравнение примет вид: $-10\sqrt{x} - 4 = 0, \ \sqrt{x} = -0{,}4.$ В этом случае уравнение корней не имеет, значит, значение $p = 10$ удовлетворяет условию задачи.

Теперь, в дальнейших рассуждениях, будем предполагать, что $p \neq 10.$

Преобразуем уравнение. Для этого положим $\sqrt{x} = y, \ y \geq 0,$ получим уравнение $5(10-p)y^2 - 10y + 6 - p = 0.$

Полученное уравнение не будет иметь корней в двух случаях:

1-й случай, когда дискриминант уравнения отрицателен $D < 0;$

2-й случай, когда уравнение имеет два отрицательных корня.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1-й случай. Найдем дискриминант и определим значения p, при которых он будет отрицателен:

$D = 100 - 20(10-p)(6-p) = 100 - 1200 + 320p - 20p^2 = -20(p^2 - 16p + 55),$

$-20(p^2 - 16p + 55) < 0, \ \ p^2 - 16p + 55 > 0, \ \ (p-5)(p-11) > 0,$ (см. рис. 32),

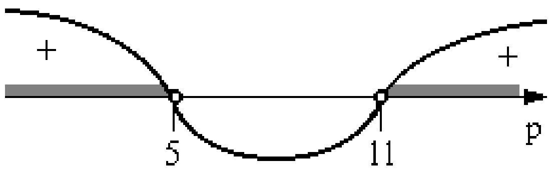


Рис. 32

$$(-\infty; \ 5) \cup (11; \ \infty).$$

2-й случай. ***Во-первых***, уравнение должно иметь корни, что произойдет при $p \in [5;\ 10) \cup (10;\ 11]$.

Во-вторых, оба корня должны быть отрицательными. Чтобы выяснить, при каких значениях p это произойдет, преобразуем это уравнение к приведенному:

$$y^2 - \frac{10}{5(10-p)}y + \frac{6-p}{5(10-p)} = 0.$$

По теореме Виета, произведение корней равно свободному члену $\frac{6-p}{5(10-p)}$, а их сумма второму коэффициенту с противоположным знаком: $\frac{10}{5(10-p)} = \frac{2}{10-p}$.

Чтобы оба корня были отрицательны, необходимо и достаточно, чтобы свободный член был положительным, а второй коэффициент, взятый с противоположным знаком - отрицательным. Получим систему:

$$\begin{cases} [5;\ 10) \cup (10;\ 11], \\ \dfrac{6-p}{5(10-p)} > 0, \\ \dfrac{2}{10-p} < 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [5;\ 10) \cup (10;\ 11], \\ p > 6, \\ p > 10, \end{cases}$$ (далее см. рис. 33).

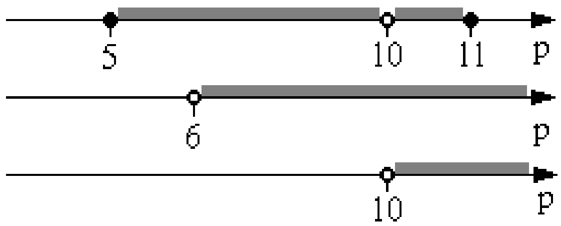


Рис. 33

$$p \in (10;\ 11].$$

Объединяя множества, полученные из первого и второго случаев, а также, помня, что при p = 10 уравнение также не имеет решений, получаем множество, при котором уравнение не имеет корней: $(-\infty;\ 5) \cup [10;\ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ 5) \cup [10;\ \infty)$.

Пример *7*. При каких значениях m корни уравнения $4x^2 - (3m+1)x - m - 2 = 0$ заключены в промежутке между -1 и 2?

Решение

Найдем условия, при которых функция $f(x) = ax^2 + bx + c,\ \ a > 0,$ имеет корни x_1 и x_2, заключены между числами p и q.

Во-первых, чтобы функция имела различные корни, дискриминант трехчлена должен быть положительным: $D = b^2 - 4ac > 0.$

Поскольку первый коэффициент положительный, тогда ветви параболы - графика функции $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a > 0,$ должны быть направлены вверх (см. рис. 34).

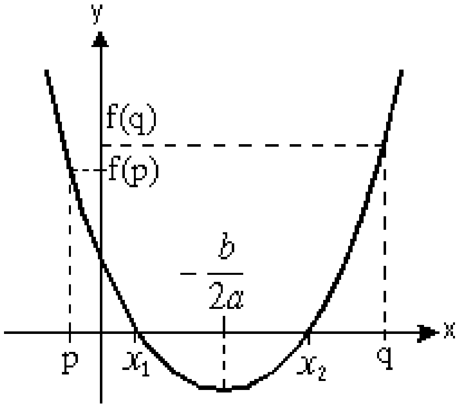


Рис. 34

Во-вторых, абсцисса вершины параболы должна быть заключена на промежутке между p и q, т. е. $p < -\dfrac{b}{2a} < q.$

В-третьих, значения функций в точках p и q должны быть положительны, так как точка p располагается левее точки x_1, а точка q правее точки x_2, а следовательно, ветви параболы слева от x_1 и справа от x_2, расположены выше оси OX, т. е. значения $f(p) > 0$ и $f(q) > 0.$

Эти три условия являются необходимыми и достаточными.

Таким образом, чтобы найти значения m, при которых корни трехчлена находились бы на заданном промежутке, необходимо решить систему неравенств:

$$\begin{cases} D = b^2 - 4ac > 0, \\ f(p) > 0, \quad f(q) > 0, \\ p < -\dfrac{b}{2a} < q. \end{cases}$$

Применим эти условия к данной задаче. Найдем дискриминант:

$$D = (3m+1)^2 + 16m + 32 = 9m^2 + 6m + 1 + 16m + 32 = 9m^2 + 22m + 33.$$

Найдем значения трехчлена в точках -1 и 2:

$f(-1) = 4 \cdot (-1)^2 + 3m + 1 - m - 2 = 2m + 3; \;\; f(2) = 16 - 6m - 2 - m - 2 = -7m + 12.$

Найдем значение $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{3m+1}{8}.$

Получим систему неравенств:

$$\begin{cases} 9m^2 + 22m + 33 > 0, \\ 2m + 3 > 0, \quad -7m + 12 > 0, \\ -1 < \dfrac{3m+1}{8} < 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R, \\ m > -\dfrac{3}{2}, \quad m < \dfrac{12}{7}, \\ -3 < m < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \in R, \\ -\dfrac{3}{2} < m < \dfrac{12}{7}, \\ -3 < m < 5. \end{cases}$$

Находим общие решения систему с помощью числовых осей (см. рис. 35):

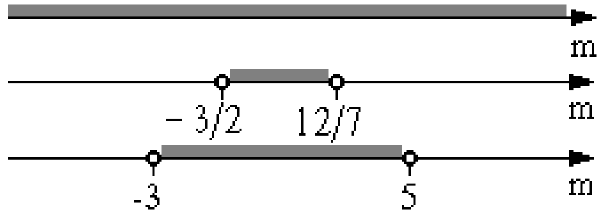


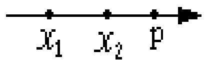
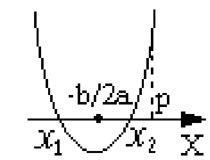
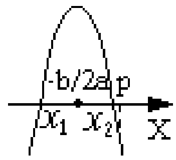
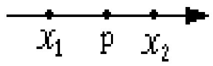
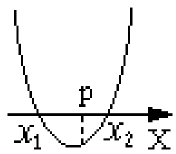
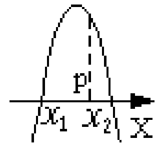
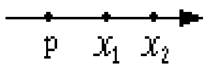
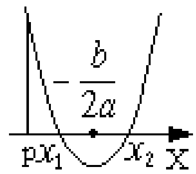
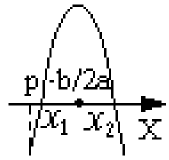
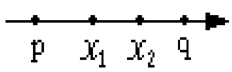
Рис. 35

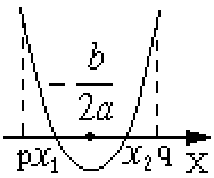
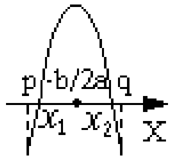
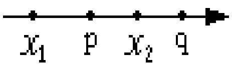
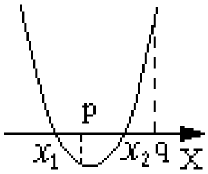
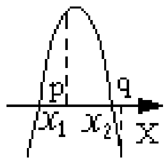
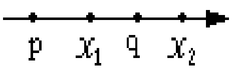
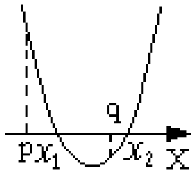
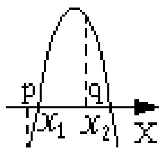
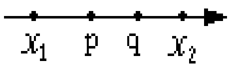
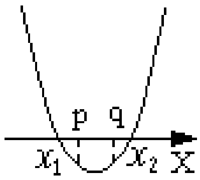
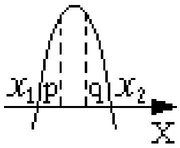
Результатом будет промежуток: $-\frac{3}{2} < m < \frac{12}{7}$.

Ответ: при $m \in \left(-\frac{3}{2};\ \ \frac{12}{7}\right)$.

Условия расположения корней квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ относительно некоторых чисел p и q, в общем случае, приведены в нижеприведенной таблице. Там же дана геометрическая иллюстрация условий.

Здесь x_1 **и** x_2 **- корни трехчлена** $f(x) = ax^2 + bx + c, \quad D > 0, \quad a \neq 0.$

Условия на корни	**a > 0**	**a < 0**
$x_1 < p, \quad x_2 < p$ 	$-\frac{b}{2a} < p, \quad f(p) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} < p, \quad f(p) < 0$ 
$x_1 < p < x_2$ 	f(p) < 0 	f(p) > 0 
$x_1 < p, \quad x_2 < p$ 	$-\frac{b}{2a} > p, \quad f(p) > 0$ 	$-\frac{b}{2a} > p, \quad f(p) < 0$ 
$p < x_1 < q, \quad p < x_2 < q$ 	$p < -\frac{b}{2a} < q, \quad f(p) > 0, \quad f(q) > 0$	$p < -\frac{b}{2a} < q, \quad f(p) < 0, \quad f(q) < 0$

		
$x_1 < p,\quad p < x_2 < q$ 	$f(p) < 0,\quad f(q) > 0$ 	$f(p) > 0,\quad f(q) < 0$ 
$x_2 > q,\quad p < x_1 < q$ 	$f(p) > 0,\quad f(q) < 0$ 	$f(p) < 0,\quad f(q) > 0$ 
$x_1 < p,\quad x_2 > q$ 	$f(p) < 0,\quad f(q) < 0$ 	$f(p) > 0,\quad f(q) > 0$ 

Пример 8. При каких значениях **а** уравнение имеет более двух корней

$$(a^2 - 3a + 2)x^2 - (a^2 - 5a + 4)x + a - a^2 = 0?$$

Решение

Если пробовать исследовать уравнение с помощью дискриминанта, то сразу становится понятным тщетность попыток, ибо известно, что знак дискриминанта определяет число корней не более двух. Если D > 0, тогда уравнение имеет два различных действительных корня, если D = 0, тогда два равных корня (или один корень), если D < 0, тогда оно совсем не имеет корней.

Приходим к очень простой мысли, что уравнение будет иметь более двух корней, если оно обращается в числовое равенство - тождество, выполняющееся при любом значении x.

Это может быть только в одном случае, когда коэффициенты при неизвестных и свободный член равны нулю, тогда уравнение примет вид 0 = 0 и будет иметь бесконечное множество корней.

Установим, при каких значениях a это произойдет. Для этого одновременно должны выполняться три равенства, т. е. надо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} a^2 - 3a + 2 = 0, \\ a^2 - 5a + 4 = 0, \\ a - a^2 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 4, \quad a = 1. \\ a_1 = 1, \quad a_2 = 0, \end{cases}$$

Ответ: $a = 1.$

Задание 1

1. При каких значениях параметра **a** данное квадратное уравнение:
а) имеет два различных действительных корня;
б) имеет один действительный корень;
в) не имеет действительных корней, если:

$$1)\ \ ax^2 + ax + 7 = 0,\ \ 2)\ \ ax^2 + 16x - a^2 = 0,\ \ 3)\ \ \frac{1}{a}x^2 + (a-2)x + a = 0.$$

2. При каких значениях m оба корня уравнения $2x^2 + mx + m^2 - 5 = 0$: а) меньше 1; б) больше -1?

3. При каких значениях k один корень уравнения $x^2 - (k+1)x + k^2 + k - 8 = 0$ больше 2, а другой корень меньше 2?

4. При каких значениях k один корень уравнения $(k-5)x^2 - 2kx + k - 4 = 0$ меньше 1, а другой корень больше 2?

5. При каком наименьшем целом k парабола $y = (k-12)x^2 + 2(k-12)x + 2$ пересечет ось абсцисс в двух точках, лежащих по одну сторону от начала координат?

4.3. Определение коэффициентов уравнения по зависимости между корнями

Пример 9. В уравнении $2x^2 - 11x + m = 0$ найти m, если $2\alpha - \beta = 2,$ где α и β - корни уравнения.

Решение

Уравнение имеет корни, если $D = 11^2 - 8m \geq 0,$ отсюда находим:

$$8m - 11^2 \leq 0,\quad m \leq \frac{121}{8}.$$

Преобразуем уравнение к приведенному: $x^2 - \frac{11}{2}x + \frac{m}{2} = 0.$

По теореме Виета: $\alpha + \beta = \frac{11}{2},\quad \alpha \cdot \beta = \frac{m}{2}$ и, по условию: $2\alpha - \beta = 2.$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{11}{2}, \\ 2\alpha - \beta = 2, \\ \alpha\beta = \frac{m}{2}, \end{cases}$$

решая первые два уравнения находим: $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 11, \\ 2\alpha - \beta = 2, \end{cases}$ $\alpha = \frac{5}{2},\ \ \beta = 3.$ Подставляя эти значения в третье уравнение, определим m: m = 15. Теперь надо установить, удовлетворяет ли это значение m первоначальному условию, когда уравнение вообще имеет корни, т. е. условию: $m \leq \frac{121}{8}.$

Убеждаемся, что удовлетворяет, в самом деле: $15 < \dfrac{121}{8}$.

Ответ: m = 15.

Пример 10. Найти условие, при котором разность корней уравнения равна m:

$$x^2 + px + q = 0.$$

Решение

Заведомо надо учесть, что для существования корней уравнения дискриминант должен быть неотрицателен, т. е. должно выполняться неравенство:

$$p^2 - 4q \geq 0.$$

Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения, тогда, по условию: $x_1 - x_2 = m$.

С другой стороны, по теореме Виета: $x_1 + x_2 = -p, \quad x_1 \cdot x_2 = q$.

Получим систему, состоящую из трех уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = m, \\ x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 \cdot x_2 = q. \end{cases}$$

Из первых двух уравнений выразим x_1 и x_2 через m и p:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = m, \\ x_1 \cdot x_2 = -p, \end{cases} \quad x_1 = m - p, \quad x_2 = -\frac{m+p}{2}.$$

Подставим эти значения в третье уравнение и найдем:

$$-(m-p) \cdot \frac{m+p}{2} = q, \quad \frac{m^2 - p^2}{4} = -q, \quad m^2 - p^2 = -4q \quad \text{или} \quad m^2 = p^2 - 4q.$$

Поскольку $m^2 \geq 0$ при $m \in R$, тогда неравенство $p^2 - 4q \geq 0$ выполняется.

Ответ: $m^2 = p^2 - 4q.$

Пример 11. Найти условие, при котором разность квадратов корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ равна $\dfrac{c^2}{a^2}$.

Решение

Мы допускаем, что уравнение имеет корни, а значит $b^2 - 4ac \geq 0, \quad a \neq 0.$

Пусть x_1 и x_2 - корни заданного уравнения, тогда, по условию: $x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{c^2}{a^2}$.

Преобразуем уравнение к приведенному, полагая, что $a \neq 0$: $x^2 + \dfrac{b}{a}x + \dfrac{c}{a} = 0.$

Отсюда, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Получим систему трех уравнений:

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = \dfrac{c^2}{a^2}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 + x_2)(x_1 - x_2) = \dfrac{c^2}{a^2}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{b}{a}(x_1 - x_2) = \dfrac{c^2}{a^2}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = -\dfrac{c^2}{ab}, \\ x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Чтобы выполнялось первое равенство, потребуем, чтобы $b \neq 0$.

Из первых двух уравнений находим: $x_1 = -\dfrac{c^2 + b^2}{2ab}, \quad x_2 = \dfrac{c^2 - b^2}{2ab}.$

Подставляя в третье уравнение, получим:

$$-\frac{c^2 + b^2}{2ab} \cdot \frac{c^2 - b^2}{2ab} = \frac{c}{a}, \quad -\frac{c^4 - b^4}{4a^2 b^2} = \frac{c}{a}, \quad \frac{b^4 - c^4}{4a^2 b^2} = \frac{c}{a}, \quad b^4 - c^4 = 4acb^2.$$

Ответ: $b^4 - c^4 = 4acb^2, \quad b^2 - 4ac \geq 0, \quad a \neq 0, \quad b \neq 0.$

Пример 12. При каком значении k один корень уравнения вдвое меньше другого:

$$(k^2 - 5k + 3)x^2 + (3k - 1)x + 2 = 0.$$

Решение

1. Первый коэффициент уравнения не должен равняться нулю, иначе уравнение "вырождается" в линейное и задача теряет смысл, значит,

$$k^2 - 5k + 3 \neq 0, \quad k_1 \neq \frac{5 - \sqrt{13}}{2}, \quad k_2 \neq \frac{5 + \sqrt{13}}{2}.$$

2. Чтобы уравнение имело два различных корня, его дискриминант должен быть положительным:

$$D = (3k - 1)^2 - 8(k^2 - 5k + 3) = 9k^2 - 6k + 1 - 8k^2 + 40k - 24 = k^2 + 34k - 23 > 0.$$

3. Допустим, что это условие выполняется, т. е. D > 0 и уравнение имеет два различных действительных корня. Обозначим их α и β.

Тогда, по условию: $\alpha = 2\beta.$

Преобразуем уравнение к приведенному, получим:

$$x^2 + \frac{3k - 1}{k^2 - 5k + 3} \cdot x + \frac{2}{k^2 - 5k + 3} = 0.$$

По теореме Виета

$$\alpha + \beta = -\frac{3k - 1}{k^2 - 5k + 3} = \frac{1 - 3k}{k^2 - 5k + 3}, \quad \alpha \cdot \beta = \frac{2}{k^2 - 5k + 3}.$$

Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta = 0, \\ \alpha + \beta = \dfrac{1 - 3k}{k^2 - 5k + 3}, \\ \alpha \cdot \beta = \dfrac{2}{k^2 - 5k + 3}. \end{cases}$$

Решим два первых уравнения и выразим из них α и β.

$$\begin{cases} \alpha+\beta=0, \\ \alpha+\beta=\dfrac{1-3k}{k^2-5k+3}, \end{cases} \quad \alpha=\frac{2(1-3k)}{3(k^2-5k+3)}, \quad \beta=\frac{1-3k}{3(k^2-5k+3)}.$$

Подставим значения α и β в третье уравнение, получим:

$$\frac{2(1-3k)^2}{9(k^2-5k+3)^2}=\frac{2}{k^2-5k+3}, \quad 1-6k+9k^2=9k^2-45k+27, \quad k=\frac{26}{39}.$$

Ясно, что при этом значении k первый коэффициент данного уравнения не равен нулю.

Выясним, будет ли при этом значении k положителен дискриминант. Для этого подставим значение k в формулу дискриминанта и установим знак результата:

$$D=\frac{26^2}{39^2}+\frac{34\cdot 26}{39}-23=\frac{26^2+34\cdot 26\cdot 39-23\cdot 39^2}{39^2}=\frac{169}{39^2}>0.$$

Ответ: при $k=\dfrac{26}{39}$.

Пример 13. Дано уравнение $ax^2+bx+c=0$, корни которого α и β. Составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы $\dfrac{\alpha}{\beta}$ и $\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Решение

Так как данное уравнение имеет корни, тогда его первый коэффициент отличен от нуля, а дискриминант неотрицателен: $a\neq 0, \quad D=b^2-4ac\geq 0.$

Так как α и β корни заданного уравнения, тогда, по теореме Виета, их сумма и произведение равны: $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \quad \alpha\cdot\beta=\dfrac{c}{a}.$

Чтобы составить новое квадратное уравнение, надо воспользоваться теоремой, обратной теореме Виета, а для этого необходимо найти сумму и произведение корней нового квадратного уравнения и полученные формулы выразить через сумму и произведение корней данного уравнения.

Пусть корни искомого уравнения α_1 и β_1, тогда искомым уравнением будет:

$$x^2-(\alpha_1+\beta_1)\cdot x+\alpha_1\cdot\beta_1=0.$$

По условию: $\alpha_1=\dfrac{\alpha}{\beta}$, а $\alpha_2=\dfrac{\beta}{\alpha}$.

Выразим сумму и произведение чисел α_1 и β_1 через сумму и произведение α и β.

$$\alpha_1+\beta_1=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha\cdot\beta}=\frac{\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta},$$

$$\alpha_1\cdot\beta_1=\frac{\alpha\beta}{\beta\alpha}=1.$$

Подставляя значения вместо суммы и произведения α и β в полученные равенства, находим для корней искомого уравнения:

$$\alpha_1+\beta_1=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{\alpha\beta}=\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^2-2\cdot\frac{c}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{b^2-2ac}{ac},\quad \alpha_1\cdot\beta_1=1.$$

Теперь можно составить искомое уравнение:

$$x^2-\frac{b^2-2ac}{ac}\cdot x+1=0,\quad acx^2+(2ac-b^2)x+ac=0.$$

Ответ: $acx^2+(2ac-b^2)x+ac=0,\quad a\neq 0,\quad c\neq 0,\quad b^2-4ac\geq 0.$

Задание 2

1. Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения $x^2+x-7=0.$ Не решая уравнение, найдите: а) $x_1^2+x_2^2$; б) $x_1^3+x_2^3$; в) $x_1^4+x_2^4$.

2. При каком действительном значении **а** сумма квадратов корней уравнения $x^2+ax+a-2=0$ будет наименьшей?

3. Какому условию удовлетворяют коэффициенты уравнения $x^2+px+q=0,$ если $\alpha=\frac{\beta+2}{2\beta-1}$, где α и β - корни уравнения?

4.4. Установление зависимости между корнями двух уравнений. Еще один способ решения квадратного уравнения

Пример 14. Какая зависимость существует между корнями двух уравнений, где a, b, c, p, q не равны 0: $ax^2+bx+c=0$ и $ax^2+(b-4a)x+4a-2b+c=0$?

Решение

Во-первых, корни уравнений должны существовать (первые коэффициенты не равно нулю по условию), значит, для первого уравнения: $b^2-4ac\geq 0;$ для второго уравнения: $(b-4a)^2-4a(4a-2b+c)\geq 0$ или $b^2-8ab+16a^2-16a^2+8ab-4ac\geq 0,$ откуда получаем такое же соотношение, как и для первого уравнения: $b^2-4ac\geq 0.$

Пусть α и β - корни первого уравнения, а α_1 и β_1 - корни второго уравнения. По теореме Виета, для первого уравнения, находим: $\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\cdot\beta=\frac{c}{a}.$

Для второго уравнения, по теореме Виета, имеем: $\alpha_1+\beta_1=-\frac{b-4a}{a}=-\frac{b}{a}+4,$ $\alpha_1\cdot\beta_1=\frac{4a-2b+c}{a}=4-2\cdot\frac{b}{a}+\frac{c}{a}.$

Подставим в последние два равенства вместо $-\frac{b}{a}=\alpha+\beta,\ \frac{c}{a}=\alpha\cdot\beta.$

В результате такой подстановки получаем:

$$\alpha_1+\beta_1=\alpha+\beta+4,\quad \alpha_1\cdot\beta_1=4+2(\alpha+\beta)+\alpha\cdot\beta.$$

Ответ: $\alpha_1 + \beta_1 = \alpha + \beta + 4, \quad \alpha_1 \cdot \beta_1 = 4 + 2(\alpha + \beta) + \alpha \cdot \beta.$

Пример 15. Найдите корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0,$ если $a + b + c = 0.$

Решение

1. Если a = 0, тогда уравнение примет вид: $bx + c = 0$, а условие станет таким: $b + c = 0.$ Из условия находим: $c = -b,$ уравнение примет вид $bx - b = 0, \quad bx = b.$

а) Если b = 0, тогда получим $0 \cdot x = 0$ - это уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

б) Если $b \neq 0,$ тогда $x = 1.$

2. Если $a \neq 0,$ тогда найдем дискриминант $D = b^2 - 4ac.$

Из соотношения $a + b + c = 0$ выразим b и подставим в выражение для дискриминанта: $b = -(a + c); \quad (a + c)^2 - 4ac = a^2 + 2ac + c^2 - 4ac = a^2 - 2ac + c^2 = (a - c)^2.$

а) При a = c имеет один корень: $x = -\dfrac{b}{2a}.$

b) При $a \neq c$ уравнение имеет два различных корня:

$$x_1 = \frac{-b - (a - c)}{2a} = \frac{c - a - b}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + (a - c)}{2a} = \frac{a - b - c}{2a}.$$

Ответ:

1. а) Если a = 0 и b = 0, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

б) Если a = 0, но $b \neq 0,$ тогда x = 1.

2. а) Если $a \neq 0$ и $a = c$, тогда уравнение имеет один корень: $x = -\dfrac{b}{2a}.$

б) Если $a \neq 0$ и $a \neq c,$ тогда уравнение имеет два различных действительных корня: $x_1 = \dfrac{c - a - b}{2a}, \quad x_2 = \dfrac{a - b - c}{2a}.$

Пример 16. Найти рациональный способ решения следующих уравнений:

1) $x^2 + bx - b - 1 = 0;$ 2) $b(b^2 + 3a^2)x^2 - (b - a)^3 x - a(a^2 + 3b^2) = 0.$

Решение

1) $x^2 + bx - b - 1 = 0.$

Находим дискриминант: $D = b^2 + 4(b + 1) = b^2 + 4b + 4 = (b + 2)^2.$ Он будет неотрицательным при любом действительном значении b.

Рассмотрим два случая.

1. $D = 0, \quad (b + 2)^2 = 0, \quad b + 2 = 0, \quad b = -2.$ В этом случае уравнение имеет единственный корень $x = -\dfrac{b}{2} = -\dfrac{-2}{2} = 1.$

2, Если $b \neq -2,$ тогда $D > 0$ и уравнение имеет два различных действительных корня, которые легко найти по теореме Виета. Их сумма должна быть равна $-b$, а произведение равно $(-b-1)$. Только два числа дают в сумме $-b$, а в произведении $(-b-1)$ - это $(-b-1)$ и 1. Значит, $x_1=-b-1,\quad x_2=1.$

Ответ: **1**. Если $b=-2$, тогда уравнение имеет единственный корень $x=1.$
2. Если $b\neq -2,$ тогда уравнение имеет два различных корня:

$$x_1=-b-1,\quad x_2=1.$$

2) $b(b^2+3a^2)x^2-(b-a)^3x-a(a^2+3b^2)=0.$

Решение

1. Если $b(b^2+3a^2)=0.$ Это возможно в двух случаях, при $b=0$ и $b=a=0.$

Если b = 0, тогда уравнение примет вид $a^3x=a^3,$ которое при a = 0 имеет бесконечное множество решений, а при $a\neq 0$ - единственное решение: x = 1.

Если a = b = 0, то этот случай уже рассмотрен - уравнение имеет бесконечное множество решений, x - любое действительное число.

2. Если $b\neq 0$, тогда будем решать уравнение, как квадратное относительно x. Для этого преобразуем его к приведенному, для чего разделим обе части уравнения на $b(b^2+3a^2).$

Получим уравнение $x^2-\dfrac{(b-a)^3}{b(b^2+3a^2)}\cdot x-\dfrac{a(a^2+3b^2)}{b(b^2+3a^2)}=0.$

Пусть x_1 и x_2 - корни уравнения, тогда, по теореме Виета, сумма корней равна:

$$x_1+x_2=\frac{(b-a)^3}{b(b^2+3a^2)},$$

а их произведение равно

$$x_1\cdot x_2=-\frac{a(a^2+3b^2)}{b(b^2+3a^2)}=\frac{-3b^2a-a^3}{3ba^2+b^3}.$$

Теперь становится понятным, что корнями уравнения могут быть только числа: $x_1=1,\quad x_2=\dfrac{-3b^2a-a^3}{3ba^2+b^3}.$

В самом деле, произведение корней дает: $x_1\cdot x_2=1\cdot\dfrac{-3b^2a-a^3}{3ba^2+b^3}=-\dfrac{a(a^2+3b^2)}{b(b^2+3a^2)}.$

Покажем, что их сумма равна второму коэффициенту с противоположным знаком:

$$x_1+x_2=1+\frac{-3b^2a-a^3}{3ba^2+b^3}=\frac{b^3-3b^2a+3ba^2-a^3}{b(b^2+3a^2)}=\frac{(b-a)^3}{b(b^2+3a^2)},$$

Ответ:

1. Если a = b = 0, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений.
2. Если b = 0, но $a\neq 0,$ тогда уравнение имеет единственное решение x = 1.
3. Если $b\neq 0$ и $a\neq 0,$ тогда уравнение имеет два корня

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{-3b^2a-a^3}{3ba^2+b^3}.$$

Задание 3

1. Какая взаимозависимость существует между корнями двух квадратных уравнений, где a, b, c, p, q не равны нулю:

а) $ax^2+bx+c=0$ и $ax^2+2bx+4c=0$;

б) $ax^2+bx+c=0$ и $ax^2+(b-4a)x+4a-2b+c=0$?

2. Найти рациональный способ решения следующих уравнений:

а) $x^2+b(x-1)-1=0$; б) $17x^2-19x+2=0$; в) $(a^2+b^2)x^2+(a+b)^2x+2ab=0$;

г) $abx^2+(a^2+3ab+b^2)x+(a+b)^2=0$.

4.5. Решить уравнения на множестве действительных чисел

Пример 17. $a(a+1)x^2+x-a(a-1)=0$.

Решение

Рассмотрим коэффициент при x^2, который равен $a(a+1)$.

1. Если $a(a+1)=0$, что происходит при $a=0$ и $a=-1$, тогда квадратное уравнение "*вырождается*" в линейное.

При $a=0$, получаем $x=0$, при $a=-1$, $x-2=0$, $x=2$.

2. Если $a\neq 0$, $a\neq -1$, тогда находим дискриминант и исследуем уравнение по дискриминанту. $D=1+4a^2(a^2-1)=4a^4-4a^2+1=(2a^2-1)^2$.

D = 0 при $2a^2-1=0$, $\left(\sqrt{2}a-1\right)\left(\sqrt{2}a+1\right)=0$, $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Если $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, то уравнение имеет единственное решение

$$x=\frac{-1}{2a(a+1)}=-\frac{1}{2a^2+2a}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{1+\sqrt{2}}=-\frac{1-\sqrt{2}}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=$$

$$=-\frac{1-\sqrt{2}}{1-2}=1-\sqrt{2},\quad x=1-\sqrt{2}.$$

Если $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда уравнение имеет решение

$$x=-\frac{1}{2a^2+2a}=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{1}{1-\sqrt{2}}=-\frac{1+\sqrt{2}}{\left(1-\sqrt{2}\right)\left(1+\sqrt{2}\right)}=-\frac{1+\sqrt{2}}{1-2}=1+\sqrt{2},$$

$x=1+\sqrt{2}$.

Если $a\neq\frac{1}{\sqrt{2}}$ и $a\neq-\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда дискриминант будет положительным $D>0$ и уравнение будет иметь два различных действительных корня

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{(2a^2-1)^2}}{2a(a+1)}=\frac{-1\pm|2a^2-1|}{2a(a+1)}=\frac{-1\pm(2a^2-1)}{2a(a+1)},$$

$$x_1=\frac{-1-2a^2+1}{2a(a+1)}=\frac{-2a^2}{2a(a+1)}=-\frac{a}{a+1},\quad x_2=\frac{-1+2a^2-1}{2a(a+1)}=\frac{2a^2-2}{2a(a+1)}=\frac{a-1}{a}.$$

Ответ:

1. Если а = 0, х = 0. **2**. Если а = -1, х = 2. **3**. Если $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $x=1-\sqrt{2}.$

4. Если $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда $x=1+\sqrt{2}.$

5. Если $a\neq 0,\ a\neq -1,\ a\neq \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, тогда уравнение имеет два различных действительных корня $x_1=-\frac{a}{a+1},\quad x_2=\frac{a-1}{a}.$

Пример 18. $(a-b)x^2-(a^2+ab+b^2)x+ab(2a+b)=0.$

Решение

1. Если $a-b=0,\quad a=b,$ уравнение примет вид: $-3a^2x+3a^3=0.$

В свою очередь, это уравнение при а = 0 имеет бесконечное множество решений, $x\in R$. При $a\neq 0$ - единственное решение х = а.

2. Если $a\neq b$. Найдем дискриминант: $D=\left(b^2+3ab-a^2\right)^2\geq 0.$

Преобразуем уравнение к приведенному, получим:

$$x^2-\frac{a^2+ab+b^2}{a-b}x+\frac{ab(2a+b)}{a-b}=0.$$

Это уравнение два различных действительных корня. По теореме Виета:

$$x_1+x_2=\frac{a^2+ab+b^2}{a-b},\quad x_1\cdot x_2=\frac{ab(2a+b)}{a-b}.$$

Нетрудно найти, что эти равенства выполняются, только в одном случае, когда $x_1=a$ и $x_2=\frac{b(2a+b)}{a-b}.$

В самом деле, только при этих значениях x_1 и x_2 будет выполняться теорема Виета для уравнения:

$$x_1+x_2=a+\frac{b(2a+b)}{a-b}=\frac{a(a-b)+b(2a+b)}{a-b}=\frac{a^2-ab+2ab+b^2}{a-b}=\frac{a^2+ab+b^2}{a-b},$$

$$x_1\cdot x_2=a\cdot\frac{b(2a+b)}{a-b}=\frac{ab(2a+b)}{a-b}.$$

При других возможных комбинациях значений x_1 и x_2 сумма и произведение их не будут равны данным значениям по теореме Виета. (Конечно, можно воспользоваться обычным способом определения корней по формуле.)

Ответ:

1. Если $a=b=0$, тогда уравнение имеет бесконечное множество решений, х - любое действительное число.

2. Если $a = b \neq 0,$ тогда уравнение имеет единственное решение $x = a.$

3. Если $a \neq b,$ тогда уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = a \text{ и } x_2 = \frac{b(2a+b)}{a-b}.$$

Пример 19. $a(a+2)x^2 + 2x - a^2 + 1 = 0.$

Решение

Рассмотрим случай, когда первый коэффициент равен нулю: $a(a+2) = 0.$

Это произойдет при $a = 0$ и $a = -2.$

1. При $a = 0$, уравнение примет вид: $2x + 1 = 0,$ откуда $x = -\frac{1}{2}.$

2. При $a = -2,$ уравнение примет вид: $2x - 3 = 0,$ откуда $x = \frac{3}{2}.$

3. Если $a \neq 0,$ $a \neq -2,$ тогда, чтобы уравнение имело корни, дискриминант должен быть неотрицательным: $D = 4 + 4a(a+2)(a^2 - 1) \geq 0.$

После преобразований, получим: $D = (2 - 2a - 2a^2)^2 \geq 0$ при любом действительном значении a.

1) Если D = 0, тогда уравнение имеет единственное решение. Это произойдет при $2 - 2a - 2a^2 = 0,$ $a^2 + a - 1 = 0,$ $a_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $a_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$

Единственный корень уравнения, при этих значениях a определяется по формуле $x = -\frac{1}{a(a+2)}.$

В частности, при $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{2}{\sqrt{5}-1}$, при $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, также $x = \frac{2}{\sqrt{5}-1}.$

2) Если $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, D > 0 и уравнение имеет два различных действительных корня, которые можно найти по общей формуле.

Но эти преобразования довольно сложны, поэтому найдем корни, применяя теорему Виета.

Преобразуем уравнение к приведенному, получим:

$$x^2 + \frac{2}{a(a+2)}x + \frac{1-a^2}{a(a+2)} = 0.$$

По теореме Виета, сумма корней должна быть равна: $-\frac{2}{a(a+2)},$ а произведение $\frac{1-a^2}{a(a+2)} = \frac{(1-a)(1+a)}{a(a+2)}.$

Такое возможно только в одном случае, если $x_1 = \frac{a-1}{a}$, $x_2 = -\frac{a+1}{a+2}$. Это легко проверить, выполнив сложение и умножение корней.

Ответ:

1. Если $a = 0$, $x = -\frac{1}{2}$.

2. Если $a = -2$, $x = \frac{3}{2}$.

3. Если $a = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, $x = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

4. Если $a \neq 0$, $a \neq -2$, $a \neq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, тогда $x_1 = \frac{a-1}{2}$, $x_2 = -\frac{a+1}{a+2}$.

Задание 4

Решите уравнение относительно параметра а:

1. $\frac{1}{a+1}x^2 - x + \frac{a}{a+1} = 0;$

2. $ax^2 - (a-1)x - 2a + 2 = 0;$

3. $(9 - a^2)x^2 - 6x + 1 = 0;$

4. $(ax+1)^2 - (a-x)^2 + a^2x^2 - 4ax - 1 = 0;$

5. $(a-2)x^2 - 2ax + 2a - 3 = 0.$

4.6. Аналитическое и графическое решение квадратных уравнений, содержащих модули

Пример 20. Решить уравнение $x^2 - 6|x| + 8 = 0.$

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Преобразуем уравнение $6|x| = x^2 + 8$, $|x| = \frac{x^2+8}{6}$. Поскольку $\frac{x^2+8}{6} > 0$ при любых значениях x из множества действительных чисел, $x \in R$, тогда получим совокупность двух уравнений: (1) $x = \frac{x^2+8}{6}$ и (2) $x = -\frac{x^2+8}{6}$.

Решим каждое из уравнений:

(1) $x^2 - 6x + 8 = 0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 4$; (2) $x^2 + 6x + 8 = 0$, $x_3 = -2$, $x_4 = -4$.

2-й способ

Данное уравнение равносильно совокупности двух смешанных систем:

(1) $\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 6x + 8 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0, \\ x_1 = 2, \quad x_2 = 4, \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = 2, \quad x_2 = 4.$

(2) $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 6x + 8 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ x_1 = -2, \quad x_2 = -4, \end{cases} \Leftrightarrow x_3 = -2, \quad x_4 = -4.$

3-й способ

Положим $y = |x|$, тогда $y^2 = x^2$, получим уравнение $y^2 - 6y + 8 = 0$, которое имеет два корня $y_1 = 2$, $y_2 = 4$. Имеем совокупность двух уравнений:

$|x| = 2, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = 2; \quad |x| = 4, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 4.$

Ответ: $x_1 = -2, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = -4, \quad x_4 = 4.$

Графическое решение

Идея графического решения уравнения заключается в следующем: построить график функции $y = x^2 - 6|x| + 8$ и найти координаты точек пересечения графика с осью OX.

Построить график функции можно, учитывая, что функция $y = x^2 - 6|x| + 8$ - четная. В самом деле: $f(-x) = (-x)^2 - 6|-x| + 8 = x^2 - 6|x| + 8 = f(x)$. Учитывая это, достаточно построить график для значений $x \ge 0$, т. е. $y = x^2 - 6x + 8$, а затем построить симметричную кривую относительно оси OY.

Можно поступить иначе, построить график для случая $x \ge 0$, а затем для $x < 0$.

Мы применим первый способ. Строим график $y = x^2 - 6x + 8$ для $x \ge 0$.

Графиком этой функции является парабола (см. рис. 36), ветви которой направлены вверх (a = 1 > 0), с вершиной в точке с координатами:

$$x_C = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3, \quad y_C = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = -1, \text{ C(3; -1)}.$$

Дополнительные точки для построения графика:

x	0	1	5	6
y	8	3	3	8

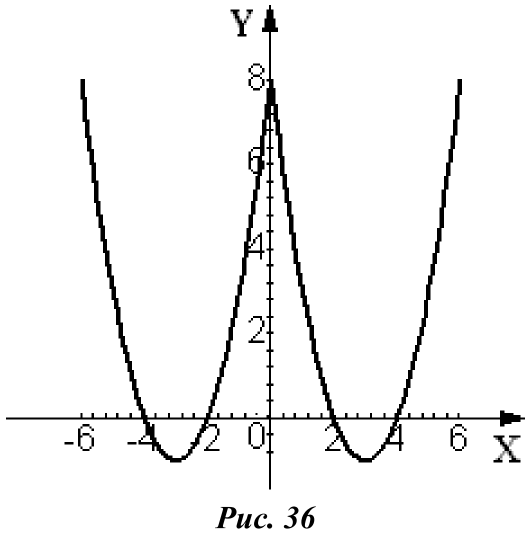


Рис. 36

Находим точки пересечения с осью OX: -4, -2, 2, 4.

Ответ: $x_1 = 2,\quad x_2 = 4,\quad x_3 = -2,\quad x_4 = -4.$

Пример 21. Решить аналитически и графически уравнение $|2x-3| = (2x-3)^2$.

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Поскольку $(2x-3)^2 \geq 0$ при всех $x \in R$, тогда, по определению абсолютной величины, получим совокупность двух уравнений:

$$(1)\ 2x-3 = (2x-3)^2 \ \text{ и } (2)\ 2x-3 = -(2x-3)^2.$$

Решим каждое из уравнений:

$$(1)\ 2x-3 = (2x-3)^2,\ (2x-3)-(2x-3)^2 = 0,\quad (2x-3)(1-2x+3) = 0,\ x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 2.$$

$$(2)\ 2x-3 = -(2x-3)^2,\quad (2x-3)+(2x-3)^2 = 0,\ (2x-3)(1+2x-3) = 0,\ x_3 = \frac{3}{2},\ x_4 = 1.$$

Таким образом, получаем три корня: $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$

2-й способ

Найдем значения x, при котором модуль обращается в нуль: $2x-3 = 0,\ x = \frac{3}{2}.$

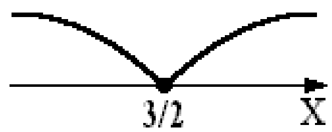


Рис. 37

Получим два промежутка (см. рис. 37), на каждом из которых решим уравнение, получим две смешанные системы:

$$(1)\ \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ -(2x-3) = (2x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq \frac{3}{2}, \\ x_1 = \frac{3}{2},\quad x_2 = 1. \end{cases}$$

Оба корня входят в промежуток $x \leq \frac{3}{2}$ и являются корнями уравнения: $x_1 = \frac{3}{2},\ x_2 = 1.$

(2) $\begin{cases} x > \dfrac{3}{2}, \\ 2x - 3 = (2x-3)^2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{3}{2}, \\ x_3 = \dfrac{3}{2}, \quad x_4 = 2. \end{cases}$ $x_3 = \dfrac{3}{2}$ не входит в промежуток $x > \dfrac{3}{2}$,

$x_4 = 2$ входит в промежуток $x > \dfrac{3}{2}$.

3-й способ

Положим $y = |2x-3|$, тогда $y^2 = (2x-3)^2$, получим уравнение $y = y^2$, которое имеет два корня $y - y^2 = 0$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Будем иметь совокупность двух уравнений: $|2x-3| = 0$, $x_1 = \dfrac{3}{2}$ и $|2x-3| = 1$; $2x - 3 = -1$, $x_2 = 1$; $2x - 3 = 1$, $x_3 = 2$.

Ответ: $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Графическое решение

Строим графики функций $y = |2x-3|$ и $y = (2x-3)^2$, находим абсциссы их точек пересечения, которые будут являться решениями уравнения.

Для построения графика функции $y = |2x-3|$ строим прямую $y = 2x - 3$ и часть прямой, находящуюся ниже оси OX симметрично "отражаем" в оси OX.

Графиком функции $y = (2x-3)^2$ является парабола, ветви которой направлены вверх, с вершиной в точке (1,5; 0). Парабола пересекает ось OY в точке (0; 9).

Для более точного построения параболы можно выбрать еще несколько дополнительных точек (см. рис. 38).

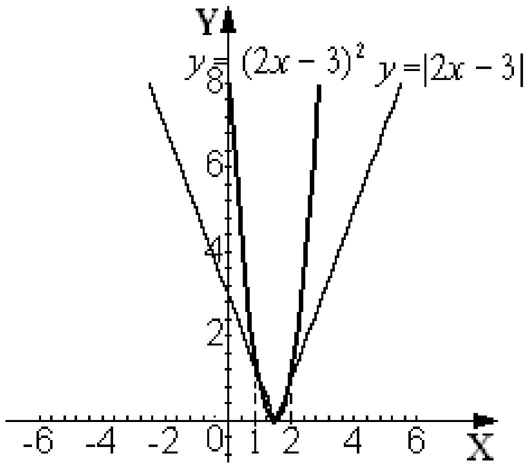


Рис. 38

Ответ: $x_1 = \dfrac{3}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Пример 22. Решить аналитически и графически уравнение

$$|5x - x^2 - 6| = x^2 - 5x + 6.$$

Решение

Аналитическое решение

1-й способ

Найдем значения x, при которых $x^2 - 5x + 6 \ge 0$. Разложим трехчлен на множители и решим полученное неравенство методом промежутков (см. рис. 39):

$$x^2 - 5x + 6 \ge 0, \quad (x-3)(x-2) \ge 0,$$

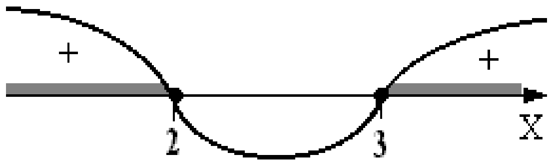


Рис. 39

Решением неравенства является объединение промежутков:

$$\left(-\infty;\ \ 2\right]\cup\left[3;\ \ \infty\right) \text{ или } x \le 2, \quad x \ge 3.$$

Решим данное уравнение, учитывая, что $x^2 - 5x + 6 \ge 0$. Для этого воспользуемся определением абсолютной величины, получим совокупность двух смешанных систем:

$$(1)\ \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 5x - x^2 - 6 = x^2 - 5x + 6 \end{cases} \text{ и } (2)\ \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 5x - x^2 - 6 = -x^2 + 5x - 6. \end{cases}$$

Решим каждую из этих систем:

$$(1)\ \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 5x - x^2 - 6 = x^2 - 5x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$(2)\ \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 5x - x^2 - 6 = -x^2 + 5x - 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 2, \quad x \ge 3, \\ 0 = 0 \end{cases} \quad x \le 2, \quad x \ge 3.$$

Решения первой системы входят в решения второй, значит, решением уравнения является множество: $\left(-\infty;\ \ 2\right]\cup\left[3;\ \ \infty\right)$.

2-й способ

Рассмотрим трехчлен, находящийся под знаком модуля, и установим, при каких значениях x он будет принимать неотрицательные и отрицательные значения.

$5x - x^2 - 6 \ge 0, \quad x^2 - 5x + 6 \le 0, \quad 2 \le x \le 3.$

Итак, на промежутке $2 \le x \le 3$ трехчлен $5x - x^2 - 6 \ge 0$, а на промежутках $\left(-\infty;\ \ 2\right)\cup\left(3;\ \ \infty\right)$ трехчлен отрицателен $5x - x^2 - 6 < 0$.

Получим совокупность двух систем:

$$(1)\ \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 5x - x^2 - 6 = x^2 - 5x + 6 \end{cases} \text{ и } (2)\ \begin{cases} \left(-\infty;\ \ 2\right)\cup\left(3;\ \ \infty\right), \\ -5x + x^2 + 6 = x^2 - 5x + 6. \end{cases}$$

Решим каждую систему:

$$(1)\ \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 5x - x^2 - 6 = x^2 - 5x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ 2x^2 - 10x + 12 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \le x \le 3, \\ x^2 - 5x + 6 = 0, \end{cases} \quad x_1 = 2, \quad x_2 = 3.$$

$$(2)\ \begin{cases}(-\infty;\ \ 2)\cup(3;\ \ \infty),\\ -5x+x^2+6=x^2-5x+6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(-\infty;\ \ 2)\cup(3;\ \ \infty),\\ 0=0,\end{cases}\ \ (-\infty;\ \ 2)\cup(3;\ \ \infty).$$

Объединяя решения 1-й и 2-й систем, получаем: $(-\infty;\ \ 2]\cup[3;\ \ \infty)$.

Ответ: $(-\infty;\ \ 2]\cup[3;\ \ \infty)$.

Графическое решение

Построим графики функций $y=|5x-x^2-6|$ и $y=x^2-5x+6$. Абсциссы их точек пересечения дадут решения уравнения.

Чтобы построить график функции $y=|5x-x^2-6|$, достаточно построить график функции $y=-x^2+5x-6$, а затем симметрично "зеркально" отразить в оси OX часть параболы, лежащую ниже оси OX.

Графиком функции $y=-x^2+5x-6$ является парабола, ветви которой направлены вниз.

Координаты ее вершины:

$$x_C=-\frac{b}{2a}=-\frac{5}{-2}=2{,}5;\ \ y_C=-\frac{25}{4}+\frac{25}{2}-6=\frac{1}{4};\ \ C(2{,}25;\ \ 0{,}25).$$

Точки пересечения с осью OX: (2; 0) и (3; 0).

Точки пересечения с осью OY: (0; 6).

Аналогично построим параболу $y=x^2-5x+6$ (см. рис. 40).

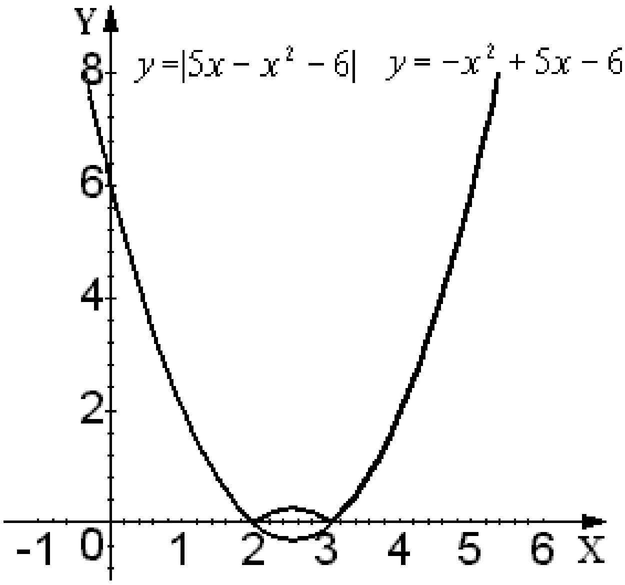


Рис. 40

Графики полностью совпадают на промежутках $(-\infty;\ \ 2]$ и $[3;\ \ \infty)$. Эти промежутки и будут являться решениями уравнения.

Ответ: $(-\infty;\ \ 2]\cup[3;\ \ \infty)$.

Пример 23. Решить аналитически и графически уравнение

$$\left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| = \frac{3}{4}.$$

Решение

Аналитическое решение

Преобразуем уравнение, умножив обе его части на 2, будучи положительным числом, его можно вносить под знак модуля, поэтому получим:

$$\left|x^2 - 4x + 3\right| + \left|x^2 - 6x + 8\right| = \frac{3}{2}.$$

У каждого из трехчленов положительные дискриминанты. Это дает возможность разложить каждый из них на линейные множители.

Уравнение примет вид: $|(x-1)(x-3)| + |(x-2)(x-4)| = 1{,}5.$

На числовой прямой (см. рис. 41) отложим точки, в которых каждый из множителей обращается в нуль. В результате получим пять промежутков, на каждом из которых определим знаки трехчленов под модулем и решим полученные уравнения.

Рис. 41

Однако такой способ не будет рациональным. Целесообразнее изобразить промежутки знакопостоянства каждого из трехчленов на числовых осях. Тогда определение их знаков будет упрощено и сделается более наглядным (см. рис. 42).

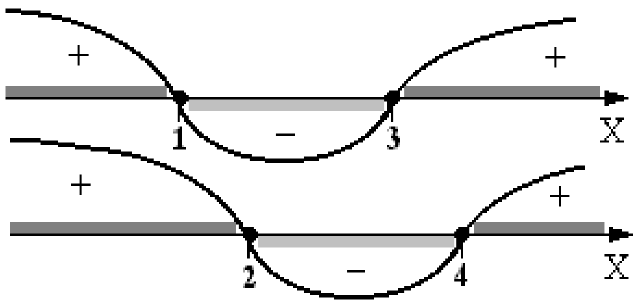


Рис. 42

При таком схематическом изображении понятно, что:

1) при $x \le 1$ оба трехчлена положительны и уравнение примет вид:

$$x^2 - 4x + 3 + x^2 - 6x + 8 = \frac{3}{2}.$$

Решая его, находим $x_1 \approx 1{,}28,\ \ x_2 \approx 3{,}73.$ Оба корня не входят в промежуток $x \le 1$ и являются посторонними;

2) при $1 < x \le 2$ первый трехчлен отрицателен, а второй положителен, получим уравнение: $-(x^2 - 4x + 3) + x^2 - 6x + 8 = \frac{3}{2},$ откуда находим корень $x = 1{,}75,$ который входит в промежуток $1 < x \le 2$ и является решением уравнения;

3) при $2 < x \le 3$ оба трехчлена отрицательны, получаем:

$-(x^2 - 4x + 3) - (x^2 - 6x + 8) = \frac{3}{2},$ откуда $x = 2{,}5,$ который входит в промежуток $2 < x \le 3$ и является решением уравнения;

4) при $3 < x \le 4$ первый трехчлен положителен, второй - отрицателен, получаем уравнение:

$x^2 - 4x + 3 - (x^2 - 6x + 8) = \frac{3}{2}$, отсюда $x = 3{,}25$, который входит в промежуток $3 < x \le 4$ и является решением уравнения;

5) при $x > 4$ оба трехчлена положительны, получается такая же ситуация, как и в первом случае. И здесь, оба корня $x_1 \approx 1{,}28$, $x_2 \approx 3{,}73$ не входят в промежуток и являются посторонними.

Ответ: $x_1 = 1{,}75$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 3{,}25.$

Графическое решение

Для графического решения преобразуем уравнение:

$$\left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right| + \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| = \frac{3}{4}, \quad \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right| = \frac{3}{4} - \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right|,$$

$$\left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right| = -\left(\left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| - \frac{3}{4}\right).$$

Построим графики функций $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right|$ и $y = -\left(\left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| - \frac{3}{4}\right).$

График функции $y = -\left(\left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| - \frac{3}{4}\right)$ будем строить в несколько этапов:

а) строим график функции $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$;

б) строим график функции $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right|$, "зеркально" отразив нижнюю часть кривой $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x + 4$ в оси OX;

в) строим график функции $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| - \frac{3}{4}$; для этого достаточно график функции $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right|$ "опустить" вниз (осуществить параллельный перенос вдоль оси OY) на $\frac{3}{4}$;

г) полученный график полностью симметрично отразим в оси OX, "перевернем" вокруг оси OX на 180^0.

В результате получим график функции $y = -\left(\left|\frac{1}{2}x^2 - 3x + 4\right| - \frac{3}{4}\right)$.

График функции $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}\right|$ построим уже известным способом:

строим параболу $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + \frac{3}{2}$ и зеркально отражаем в оси ОХ только часть параболы, находящуюся ниже оси ОХ.

Находим абсциссы точек пересечения графиков, которые и будут являться решениями уравнения (см. рис. 43).

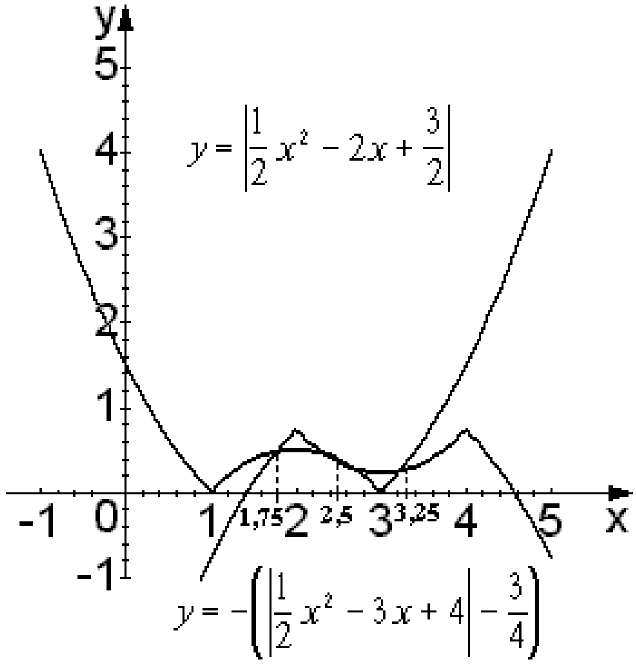


Рис. 43

Абсциссы точек пересечения следующие: 1,75; 2,5 и 3,25. Они и будут решениями уравнения.

Ответ: $x_1 = 1{,}75, \quad x_2 = 2{,}5, \quad x_3 = 3{,}25.$

Пример 24. Найти все корни уравнения $|x^2 + x - 1| = 2x - 1,$ удовлетворяющее неравенству $x < \frac{\sqrt{3}}{3}$. Решить аналитически и графически.

Решение

Аналитическое решение

Выясним, при каких значениях x квадратный трехчлен $x^2 + x - 1$ принимает положительные и отрицательные значения. Он имеет два корня:

$$x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ и } x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

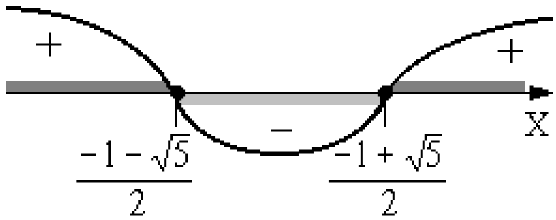


Рис. 44

Таким образом, при $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ трехчлен положителен, а при $\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ трехчлен отрицателен (см. рис. 44).

Сразу заметим, что значения $x_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ и $x_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ не являются решениями данного уравнения, так как правая часть равна нулю, а левая часть $2x-1$ не равна нулю.

Рассмотрим уравнение на промежутках, где квадратный трехчлен x^2+x-1 положителен и отрицателен.

Получим совокупность двух смешанных систем:

$$(1)\ \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ x^2+x-1 = 2x-1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ x^2-x = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2},\ \ x > \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ x_1 = 0,\ \ x_2 = 1. \end{cases}$$

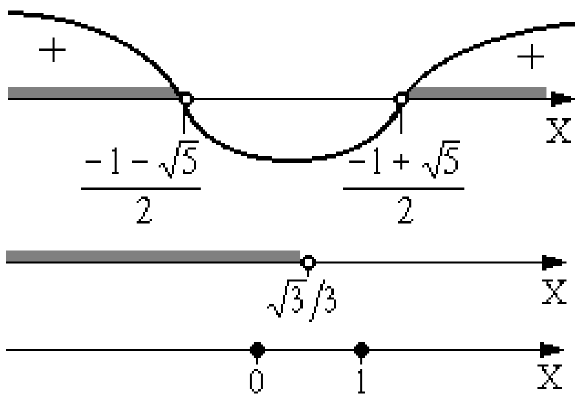


Рис. 45

Ясно, что система не имеет решений, т. е. ни один из корней уравнения (0 и 1) не входит в промежуток $x < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, который является общим решением первых двух неравенств (см. рис. 45).

Решим вторую систему (см. рис. 46):

$$(2)\ \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x < \sqrt{3}/3, \\ -x^2 - x + 1 = 2x - 1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \\ x < \sqrt{3}/3, \\ x_1 = \frac{-3-\sqrt{17}}{2}, \quad x_2 = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}. \end{cases}$$

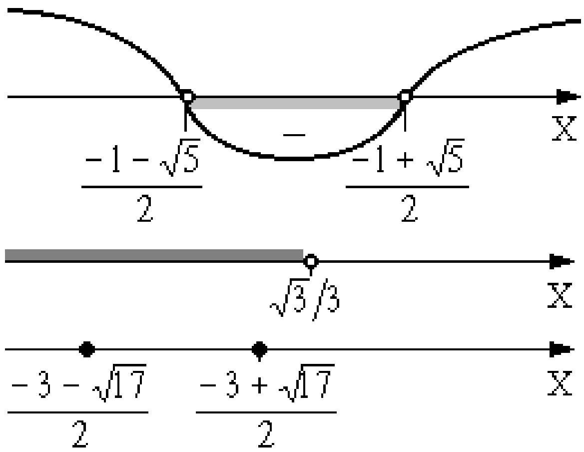


Рис. 46

Система имеет единственное решение: $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Ответ: $x = \frac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Графическое решение

Строим графики функций $y = |x^2 + x - 1|$ и $y = 2x - 1$. Получим две точки пересечения, абсцисса только одной из них меньше $\sqrt{3}/3$, т. е. удовлетворяет условию задачи (см. рис. 47).

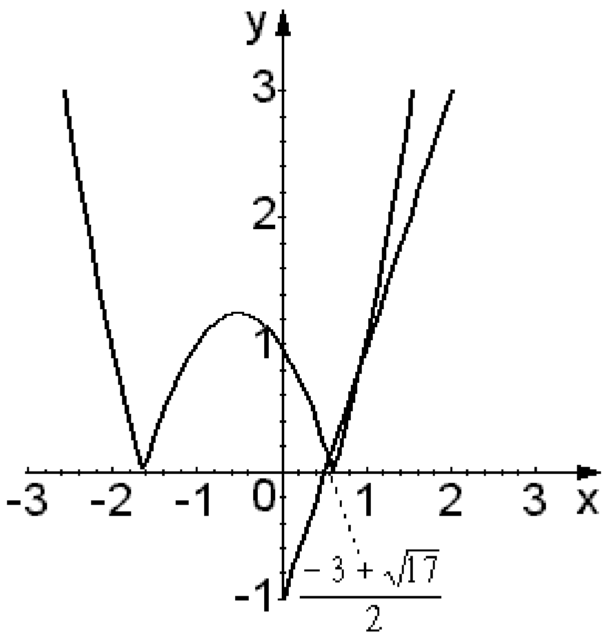


Рис. 47

Ответ: $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{2}$.

Задание 5

Решите аналитически и графически уравнения:

1. $x^2 + 2{,}5x - 1{,}5 = 0$. **2**. $|x^2 - 5x + 6| = 5x - x^2 - 6$. **3**. $|x^2 - 1| = -|x| + 1$.

4. $x^2 - 6|x-1| - 1 = 0$. **5**. $5|x+2| - 4x - x^2 - 8 = 0$.

6. Найти все корни уравнения $1 + x + |x^2 - x - 3| = 0$, удовлетворяющее неравенству $x + \dfrac{\sqrt{14}}{3} > 0$.

4.7. Для любителей и знатоков. Решение уравнений повышенной трудности

Пример 25. Найти все значения параметра а, при каждом из которых уравнение $x \cdot |x + 2a| + 1 - a = 0$ имеет единственное решение.

Решение

Найдем решения для каждого значения а, а затем отберем те, которые удовлетворяют условию задачи, т. е. при которых уравнение имеет единственное решение.

Для каждого фиксированного а будем искать решения данного уравнения сначала на промежутке $x < -2a$, а потом на промежутке $x \geq -2a$, поскольку модуль обращается в нуль при x = -2a (см. рис. 48):

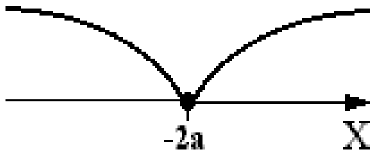


Рис. 48

1) Пусть $x < -2a$. На этом промежутке $|x + 2a| = -(x + 2a)$ и поэтому данное уравнение примет вид $x^2 + 2ax + a - 1 = 0.$

Найдем дискриминант полученного приведенного квадратного уравнения $D = 4a^2 - 4a + 4 = 4a^2 - 4a + 1 + 3 = (2a-1)^2 + 3 > 0,$ значит, при любом действительном значении а уравнение имеет два различных действительных корня:

$$x_1 = -a + \sqrt{a^2 - a + 1} \text{ и } x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

Выясним, входят ли они в промежуток $x < -2a.$ Корень $x_1 = -a + \sqrt{a^2 - a + 1}$ лежит в этой области только тогда, когда выполняется неравенство:

$$-a + \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a \text{ или } \sqrt{a^2 - a + 1} < -a.$$

Последнее неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} -a > 0, \\ a^2 - a + 1 < a^2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a < 0, \\ a > 1. \end{cases}$$

Последняя система неравенств не имеет решений, значит, ни при каком значении параметра а число x_1 не лежит в области $x < -2a.$

Корень x_2 лежит в рассматриваемой области тогда, когда выполнено неравенство:

$$-a - \sqrt{a^2 - a + 1} < -2a \text{ или } a > \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

Решим последнее неравенство. Ясно, что этому неравенству удовлетворяют все значения а из промежутка $a < 0.$

При $a \geq 0$ получим неравенство $a^2 > a^2 - a + 1.$ Отсюда находим: $0 \leq a < 1.$

Таким образом, при $0 \leq a < 1$ уравнение имеет единственное решение

$$x_2 = -a - \sqrt{a^2 - a + 1}.$$

2) Пусть $x \geq -2a.$ На этом промежутке $|x + 2a| = x + 2a$ и поэтому исходное уравнение можно переписать в виде $x^2 + 2ax + 1 - a = 0.$

Найдем дискриминант этого уравнения: $D = 4a^2 + 4a - 4 = 4(a^2 + a - 1).$

Уравнение не имеет решений, если $D < 0,$ т. е. если $a^2 + a - 1 < 0.$

Значит, уравнение не имеет корней для а из промежутка

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < a < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

Если а не принадлежат этому промежутку, то квадратное уравнение имеет корни $x_3 = -a + \sqrt{a^2 + a - 1},$ $x_4 = -a - \sqrt{a^2 + a - 1},$ причем $x_3 = x_4$ при $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ и $a = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. Выясним теперь, при каких значениях параметра а найденные корни лежат в области $x \geq -2a.$

Для этого нужно решить неравенства $x_3 \geq -2a$ и $x_4 \geq -2a$.

Неравенство $-a+\sqrt{a^2+a-1} \geq -2a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2+a-1} \geq -a$ или совокупности двух систем неравенств:

$$(1)\ \begin{cases} -a<0, \\ a^2+a-1 \geq 0 \end{cases} \text{ и } (2)\ \begin{cases} -a \geq 0, \\ a^2+a-1 \geq a^2. \end{cases}$$

Множество решений первой системы имеет вид $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, вторая система не имеет решений. Значит, только при значении $a \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ корень уравнения x_3 лежит в области $x \geq -2a$.

Неравенство $-a-\sqrt{a^2+a-1} \geq -2a$ равносильно неравенству $\sqrt{a^2+a-1} \leq a$ или системе неравенств

$$\begin{cases} a^2+a-1 \geq 0, \\ a \geq 0, \\ a^2+a-1 \leq a^2. \end{cases}$$

Множество решений полученной системы неравенств есть отрезок

$$\frac{\sqrt{5}-1}{2} \leq a \leq 1.$$

Только при этих значениях параметра а, корень x_4 принадлежит области: $x \geq -2a$. Таким образом, при $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ данное уравнение в области $x \geq -2a$ решений не имеет.

Если $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, то уравнение в рассматриваемой области имеет единственное решение $x_3=x_4=-\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

При значениях а, лежащих в области $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a \leq 1$, исходное уравнение имеет два различных корня x_3 и x_4. Если же $a>1$, то исходное уравнение имеет единственный корень x_3. Полученные результаты удобно свести в таблицу:

Значения а	**Решения данного уравнения**
$a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	x_3
$a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$x_2,\ \ x_3=x_4\ \ (x_2<x_3)$
$\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$	$x_2,\ \ x_3,\ \ x_4\ \ (x_3 \neq x_4)$
$a=1$	$x_3=0,\ \ x_4=-2$
$a>1$	x_3

Таким образом, искомые значения a образуют два промежутка: $a<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ и $a>1$.

Ответ: $a<\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$, $a>1$.

Пример 26. Найдите все значения параметра **a** из промежутка $[1;\ \infty)$, при каждом из которых больший из корней уравнения $x^2-6x+2ax+a-13=0$ принимает наибольшее значение.

Решение

Преобразуем уравнение к виду $a(2x+1)=x^2+6x+13$.

Значит, если $2x+1\neq 0$, $x\neq -\dfrac{1}{2}$, тогда $a=\dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}$.

Найдем наибольшее значение x, при котором $a\geq 1$, т. е. наибольшее решение неравенства $\dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}\geq 1$.

Преобразуем это неравенство: $\dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}-1\geq 0$, $\dfrac{-x^2+6x+13-2x-1}{2x+1}\geq 0$,

$\dfrac{-x^2+4x+12}{2x+1}\geq 0$, $\dfrac{x^2-4x-12}{2x+1}\leq 0$, $\dfrac{(x+2)(x-6)}{2x+1}\leq 0$.

Последнее неравенство решим методом промежутков (см. рис. 49), помня, что $x\neq -\dfrac{1}{2}$.

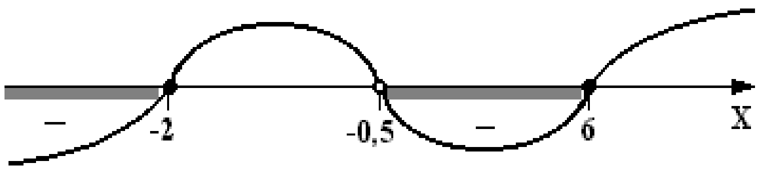


Рис. 49

Решение неравенства будет множество: $(-\infty;\ -2]\cup(-0{,}5;\ 6]$.

Ясно, что дробь $\dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}$ принимает наибольшее значение при x = 6, тогда значение a будет равно: $a=\dfrac{-x^2+6x+13}{2x+1}=\dfrac{-36+36+13}{13}=1$.

Ответ: при a = 1.

Пример 27. Для каждого значения параметра **a** определите число решений уравнения $|x^2-2x-3|=a$.

Решение

1. Если $a<0$, тогда уравнение не имеет решений, модуль любого вещественного числа неотрицателен.

2. Если $a = 0$, тогда получим уравнение $|x^2 - 2x - 3| = 0$, $x^2 - 2x - 3 = 0$. Это уравнение имеет два корня, так как $D = 4 + 12 = 16 > 0$.

3. Если $a > 0$, тогда получаем совокупность двух уравнений:

$$(1)\ x^2 - 2x - 3 = a \text{ и } (2)\ x^2 - 2x - 3 = -a.$$

Первое уравнение имеет дискриминант: $d = 4 - 4(-3 - a) = 4 + 12 + 4a = 4a + 16$.

Оно не будет иметь корней при $4a + 16 < 0$, $a < -4$, но это невозможно, так как $a > 0$.

Также оно не может иметь один корень (тогда а = -4, что также невозможно).

Таким образом, при $a > 0$ уравнение (1) имеет два корня.

Второе уравнение имеет дискриминант: $d = 4 - 4(-3 + a) = 4 + 12 - 4a = 16 - 4a$.

Оно не будет иметь корней, если $16 - 4a < 0$, $-4a < -16$, $a > 4$.

Будет иметь один корень, если $a = 4$.

Будет иметь два корня, если $a < 4$.

Окончательно получаем.

Ответ:

1. Если $a < 0$, тогда уравнение не имеет корней.

2. Если $a = 0$ и $a > 4$, тогда уравнение имеет два корня.

3. Если $a = 4$, тогда уравнение имеет три корня.

4. Если $0 < a < 4$, тогда уравнение имеет четыре корня.

Пример 28. Найдите все значения параметра **а**, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня; найдите эти корни: $x - a = 2|2|x| - a^2|$.

Решение

Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x - a)^2 = 4\left(|2|x| - a^2|\right)^2$,

$x^2 - 2ax + a^2 = 4(4x^2 - 4|x|a^2 + a^4)$, $x^2 - 2ax + a^2 = 16x^2 - 16|x|a^2 + 4a^4$,

$15x^2 - 16|x|a^2 + 2ax + 4a^4 - a^2 = 0$.

Если $x < 0$, тогда получим уравнение: $15x^2 + (16a^2 + 2a)x + 4a^4 - a^2 = 0$. (1)

Дискриминант этого уравнения равен:

$$D = (16a^2 + 2a)^2 - 60(4a^4 - a^2) = 256a^4 + 64a^3 + 4a^2 - 240a^4 + 60a^2 =$$
$$= 16a^4 + 64a^3 + 64a^2 = 16a^2(a^2 + 4a + 4) = 16a^2(a + 2)^2.$$

Уравнение (1) будет иметь один корень, при $a = 0$ и $a = -2$. Два корня, при $a \neq 0$ и $a \neq -2$.

Если $x > 0$, тогда получим уравнение: $15x^2 + (2a - 16a^2)x + 4a^4 - a^2 = 0$. (2)

Дискриминант этого уравнения равен:

$$D = (2a - 16a^2)^2 - 60(4a^4 - a^2) = 256a^4 - 64a^3 + 4a^2 - 240a^4 + 60a^2 =$$
$$= 16a^4 - 64a^3 + 64a^2 = 16a^2(a^2 - 4a + 4) = 16a^2(a - 2)^2.$$

Уравнение (2) будет иметь один корень при $a = 0$ и $a = 2$. Два корни - при $a \neq 0$ и $a \neq 2$.

Делаем вывод, что при $a=-2$ уравнение (1) имеет один корень, а уравнение (2) - два корня. При $a=2$, уравнение (1) имеет два корня, а уравнение (2) - один.

Таким образом, при $a=-2$ и $a=2$ данное уравнение имеет три корня.

Найдем эти корни. При $a=-2$, первое уравнение примет вид: $x^2+4x+4=0.$ Оно имеет один корень: $x_1=-2.$

Уравнение (2) примет вид: $15x^2-68x+60=0,$ которое имеет два корня:

$$x_2=\frac{68-16}{30}=\frac{52}{30}=\frac{26}{15},\quad x_3=\frac{84}{30}=\frac{14}{5}.$$

При $a=2$, уравнение (2) примет вид: $x^2-4x+4=0.$ Оно имеет один корень: $x_1=2.$

Уравнение (1) примет станет:

$15x^2+68x+60=0,$ которое будет иметь корни:

$$x_2=\frac{-68-16}{30}=-\frac{14}{5},\quad x_3=-\frac{26}{15}.$$

Ответ: **1**. При $a=-2,\quad x_1=-2,\quad x_2=\frac{26}{15},\quad x_3=\frac{14}{5}.$

2. При $a=2,\quad x_1=2,\quad x_2=-\frac{14}{5},\quad x_3=-\frac{26}{15}.$

Задание 6

1. Найти все значения параметра **a**, при каждом из которых уравнение $x^2-4x-2|x-a|+2+a=0$ имеет ровно два различных решения.

2. Найдите все значения параметра **a** из промежутка $(-\infty;\ 4]$, при каждом из которых меньший из корней уравнения $x^2+ax-3x-2a-2=0$ принимает наименьшее значение.

3. Для каждого значения параметра **a** определите число решений уравнения

$$\sqrt{2|x|-x^2}=a.$$

4. Найдите все значения параметра **a**, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня; найдите эти корни: $x-\frac{a}{2}=4|4|x|-a^2|.$

Упражнения

35. Доказать, что корни уравнения $x^2-(k+n)x+(kn-p^2)=0$ действительные (k, n и p - действительный числа). Найти условие, при котором корни этого уравнения будут равны между собой.

36. Доказать, что корни уравнения всегда действительные:

$$a(x-b)(x-c)+b(x-a)(x-c)+c(x-a)(x-b)=0.$$

Указание. Преобразовать уравнение, найти дискриминант и преобразовать его к виду: $D=\frac{1}{2}\left[(ab-ac)^2+(ab-bc)^2+(bc-ac)^2\right].$

37. Доказать, что уравнение $(a^2+b^2+c^2)x^2+2(a+b+c)x+3=0$ не может иметь действительных корней, если a, b, c не равны между собой.

38. При каком значении **а** один из корней уравнения $x^2 - \frac{15}{4}x + a^2 = 0$ будет квадратом другого?

39. Найти соотношение между коэффициентами уравнения $ax^2 + bx + c = 0,$ если один корень вдвое больше другого.

40. При каком значении λ корни уравнения $2x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$ удовлетворяют соотношению $3\alpha - 4\beta = 11$ (α и β - корни уравнения)?

41. При каком значении λ корни уравнения $(2\lambda - 1)x^2 + (5\lambda + 1)x + (3\lambda + 1) = 0$ относятся как 3:2?

42. Уравнения $x^2 + px + q = 0$ и $x^2 + px + q^2 = 0$ имеют общий корень. Найти зависимость между p и q.

43. При каких значениях k корни уравнения $x^2 + 2(k - 3) + 9 = 0$ заключены между числами -6 и 1?

44. Для каких значений a, один из корней уравнения

$$(a - 2)x^2 - 2(a + 3)x + 4a = 0$$

больше 3, а другой меньше 2?

45. Найдите значения a, при которых оба корня уравнения

$$(2a + 3)x^2 + (a + 1)x + 4 = 0$$

принадлежат отрезку $\left[-2;\ \ 0\right]$.

46. При каких значениях a корни уравнения $x^2 - 2x - a^2 + 1 = 0$ лежат между корнями уравнения $x^2 - 2(a + 1)x + a(a - 1) = 0$?

47. Если один из корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ равен обратному значению корня уравнения $x^2 + mx + n = 0,$ то $(pn - m)(qm - p) = (qn - 1)^2.$ Доказать.

48. Доказать, что корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ обратны корням уравнения $cx^2 + bx + a = 0.$

49. Доказать, что если α и β - корни уравнения $x^2 + bx + b^2 + a = 0,$ то $\alpha^2 + \alpha \cdot \beta + \beta^2 + \alpha = 0.$

50. Составить квадратное уравнение, корни которого были бы равны сумме и произведению корней уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

51. α и β - корни уравнения $x^2 - 5x + 3 = 0.$ Не решая уравнение, составьте квадратное уравнение, корни которого были бы $\alpha + 2\beta$ и $\beta + 2\alpha.$

52. Дано уравнение $ax^2 + bx + c = 0$, корни которого α и β; составить новое квадратное уравнение, корни которого были бы $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ и $\beta + \frac{1}{\beta}.$

53. В уравнении $3x^2 + ax - 2 = 0$ определить a так, чтобы корни уравнения α и β были бы связаны соотношением $\alpha^2 + \beta^2 = \frac{13}{9}.$

Решить уравнения на множестве действительных чисел.

54. $x^2 - 2(a + 1)x + 4a = 0.$ **55**. $a + 2b = \frac{x^2 - 4bx}{a - 2b}.$ **56**. $x(x + 3) + a(a - 3) = 2(ax - 1).$

57. $x^2 + (a + c)x = 2a(a - c).$ **58**. $\frac{x(x + 2b)}{a^2 + 2ab + b^2} + \frac{a - b}{a + b} = \frac{2x}{a + b}.$

59. $bx^2 - a = (a - b)x.$ **60**. $(m^2 + m - 2)x^2 + (2m^2 + m + 3)x = 1 - m^2.$

61. $(2x^2-3x-2)n^2+(1-x^2)m^2=mn(1+x^2)$.

Решите аналитически и графически уравнения.

62. $(x+1)^2=|x+3|$. **63**. $|x^2-3x+2|=3x-x^2-2$. **64**. $|2x^2-1|=|x^2-2x-3|$.

65. $2|x|-35-12x^2=0$. **66**. $1+4|x+1|-x^2=0$. **67**. $x^2-7|x-1|-2x+11=0$.

68. $|x^2-3|x|+2|=x^2-2x$.

69. Найти все корни уравнения $2|x^2+2x-5|=x-1$, удовлетворяющее неравенству $x<\sqrt{2}$.

70. Найдите все значения параметра **а**, при каждом из которых уравнение имеет три различных корня; найдите эти корни: $x-\dfrac{a}{3}=9|9|x|-a^2|$.

71. Найдите все значения параметра **а**, при каждом из которых уравнение имеет только один корень:

а) $|1-ax|=1+(1-2a)x+ax^2$; **б**) $|(a+1)x-2|=(1+a)x^2-2ax+2$.

Литература

1. С. Е. Ляпин, И. В. Баранова, С. Г. Борчугова “Сборник задач по элементарной алгебре”, Москва “Просвещение”, 1973 г.

2. “Сборник задач по математике для поступающих в вузы”, под редакцией проф. А. И. Прилепко, Москва “Высшая школа”, 1982 г.

3. Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов “Задачи вступительных экзаменов по математике”, Москва “Наука”, 1983 г.

4. В. Г. Болтянский, Ю. В. Сидоров, М. И. Шабунин “Лекции и задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1971 г.

5. Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов. и. Шварцбурд “Алгебра и математический анализ” для 11 класса, учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики, Москва “Просвещение”, 1993 г.

6. “Пособие по математике для поступающих в вузы”, под ред. Г. Н. Яковлева, Москва “Наука”, 1985 г.

7. “Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы”, под редакцией М. И. Сканави, учебное пособие, 1994 г.

8. О. Н. Доброва “Задания по алгебре и математическому анализу”, Москва “Просвещение”, 1996 г.

9. В. Б. Лидский, Л. В. Овсянников, А. Н. Тулайков, М. И. Шабунин “Задачи по элементарной математике”, Москва “Наука”, 1965 г.

10. И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев “Факультативный курс по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

11. М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко “Математика для абитуриента”, Москва, НТЦ “Университетский”, 1994 г.

12. Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Пиварцбурд “Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа”, Москва “Просвещение”, 1990 г.

13. “Практикум абитуриента”. Алгебра и тригонометрия. Под ред. А. А. Егорова, приложение к журналу “Квант”, 3, 1995 г., Москва, 1995 г., бюро “Квантум”.

14. В. В. Зорин “Пособие по математике для поступающих в вузы”, Москва “Высшая школа”, 1965 г.

15. А. Я. Симонов, д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман и др. “Система тренировочных задач и упражнений по математике”, Москва “Просвещение”, 1991 г.

16. Г. А. Гальперин, А. К. Толпыго “Московские математические материалы”, под ред. А. Н. Колмогорова, Москва “Просвещение”, 1986 г.

17. Журналы “Квант”, 1/1972, 3/1975, 4/1975, 7/1976, 5/1987, 6/1987, 1/1990, 2/1991, 3/1991, 5/1991, 1/1995, 2/1995, 3/1995.

18. Журналы “Математика в школе”, 3/1991, 1/1992, 1, 2, 3, 4, 5, 6/1993.